

# Interpolation mit bivariaten und trivariaten Splineräumen

Inauguraldissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Universität Mannheim

vorgelegt von  
**Diplom-Mathematiker Gero Hecklin**  
aus Speyer

Mannheim, 2004

Dekan: Professor Dr. Jürgen Potthoff, Universität Mannheim,  
Referent: Professor Dr. Günther Nürnberger, Universität Mannheim,  
Korreferent: Professor Dr. Gabriele Steidl, Universität Mannheim,

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 2005

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Grundlagen der bivariaten Theorie .....</b>	<b>9</b>
2.1 Triangulierungen .....	9
2.2 Splineräume und Interpolation .....	11
2.3 Bézier-Bernstein-Methoden .....	16
2.4 Approximationsordnung und schwache Interpolation .....	19
<b>3. Lagrange-Interpolation mit quartischen <math>C^1</math>-Splines auf Triangulierungen .....</b>	<b>23</b>
3.1 Beschreibung der Klasse $\mathcal{T}$ .....	24
3.2 Lagrange-Interpolation .....	27
<b>4. Lokale Lagrange-Interpolation mit quartischen <math>C^1</math>-Splines .....</b>	<b>33</b>
4.1 Verfeinerung von Triangulierungen .....	34
4.2 Lokale Lagrange-Interpolation .....	35
4.3 Approximationsordnung der Interpolation .....	46
<b>5. Lokale Lagrange-Interpolation mit <math>C^1</math>-Splines vom Grad <math>\geq 5</math> .....</b>	<b>51</b>
5.1 Dreieckstypen und geeignete Pfade .....	52
5.2 Lokale Lagrange-Interpolation .....	55
5.3 Approximationsordnung der Interpolation .....	64
<b>6. Hermite-Interpolation mit <math>\mathcal{S}_7^2(\Delta)</math> auf Klassen von Triangulierungen .....</b>	<b>71</b>
6.1 Beschreibung der Klasse $\mathcal{T}$ .....	72
6.2 Bestimmung der Dimension .....	76

6.3 Hermite-Interpolation .....	80
6.4 Modifikation von Triangulierungen .....	83

## 7. Interpolation mit $C^2$ -Supersplines vom Grad $\geq 7$ auf Triangulierungen ..... 87

7.1 Zerlegung von $\Omega$ .....	88
7.2 Interpolation mit $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .....	92
7.2.1 Bestimmung der Dimension .....	92
7.2.2 Lagrange-Interpolation .....	94
7.2.3 Hermite-Interpolation .....	97
7.3 Interpolation mit $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ , $q \geq 8$ .....	99
7.3.1 Lagrange-Interpolation .....	99
7.3.2 Hermite-Interpolation .....	102

## 8. Grundlagen der trivariaten Theorie ..... 105

8.1 Tetraederzerlegungen .....	105
8.2 Trivariate Splineräume .....	106
8.3 Bézier-Bernstein-Methoden .....	107

## 9. Interpolation mit $C^1$ -Supersplines auf Klassen von Tetraederzerlegungen ..... 111

9.1 Konstruktion von Tetraederzerlegungen .....	112
9.2 Die Dimension von $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ , $q \geq 6$ .....	114
9.3 Hermite-Interpolation .....	119
9.4 Lagrange-Interpolation .....	123
• Die Dimension trivariater $C^1$ -Splines auf $\Delta^1$ -Tetraederzerlegungen .....	131
* Beschreibung der Tetraederzerlegung .....	131
* Minimal bestimmende Mengen auf einem Würfel .....	131
* Die Dimension von $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$ .....	135

## Literaturverzeichnis ..... 139

# Kapitel 1:

## Einleitung

Multivariate Splinefunktionen sind bei der Geometrischen Modellierung, der Konstruktion und Rekonstruktion von Oberflächen, der Approximation verstreuter Daten und in vielen weiteren Bereichen des CAGD, der Numerischen Analysis und anderen Gebieten der Angewandten Mathematik aufgrund ihrer effizienten Berechenbarkeit und ihrer guten Approximationseigenschaften wichtige Werkzeuge.

In dieser Arbeit untersuchen wir den Raum der bivariaten und trivariaten Splines vom Grad  $q$  mit Differenzierbarkeit  $r$  auf Triangulierungen bzw. Tetraederzerlegungen  $\Delta$  eines einfach zusammenhängenden Grundgebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Dabei ist  $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_d^{i_d} \mid i_1, \dots, i_d \geq 0, i_1 + \dots + i_d \leq q\}$  der  $\binom{q+d}{d}$ -dimensionale Raum der multivariaten Polynome vom totalen Grad  $q$  und  $C^r(\Omega)$  die Menge aller  $r$  mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ .

Eine grundlegende Methode zur Konstruktion und Rekonstruktion von Oberflächen ist die Interpolation. Eine Menge  $\mathcal{L} = \{z_1, \dots, z_m\}$ , wobei  $m$  die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  ist, heißt Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ , falls zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  genau ein Spline  $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$  mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion  $f$  interpoliert, dann wird eine Menge  $\mathcal{H}$ , bestehend aus  $m$  solchen Bedingungen zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ , eine Hermite-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  genannt. Die Interpolationsmethode heißt lokal, falls die Abänderung eines Wertes  $f(z_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , den interpolierenden Spline nur in der Nähe des Punktes  $z_i$  beeinflusst. Ein weiteres Grundproblem der Splinetheorie ist die Bestimmung der Approximationsordnung. Die größte natürliche Zahl  $k$ , so dass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^r(\Delta)) := \inf\{\|f - s\| : s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)\} \leq K \cdot h^k,$$

heißt Approximationsordnung von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ . Die Konstante  $K > 0$  ist dabei nur von  $f$ ,  $q$ , dem kleinsten Winkel  $\alpha$  von  $\Delta$ , aber nicht von der maximalen Kantenlänge  $h$  von  $\Delta$  abhängig. Die Approximationsordnung gibt an wie schnell der Interpolationsfehler gegen Null geht, wenn die Triangulierung geeignet verfeinert wird und damit die Anzahl der Interpolationpunkte steigt. Sie ist im Wesentlichen abhängig von Grad und Differenzierbarkeit der Splines sowie von der Lokalität der Interpolation. Es ist wohlbekannt, dass  $k = q + 1$  optimal ist, dass jedoch nicht jede Interpolationsmethode dies erfüllt.

Bei niedrigem Polynomgrad  $q$  im Vergleich zur Differenzierbarkeitsordnung  $r$ , d.h.  $q < 2^d r + 1$ ,  $r \geq 1$ , besitzen multivariate Splineräume sehr komplexe Struktur. Für sie sind grundlegende Probleme, wie die Bestimmung der Dimension und die Konstruktion von Interpolationsmengen, derzeit nicht vollständig gelöst. Ein möglicher Ansatz zur Interpolation mit solchen Splineräumen ist, alle Dreiecke bzw. Tetraeder der betrachteten Zerlegung in mehrere Subdreiecke bzw. Subtetraeder zu unterteilen. Dies führt zu Macro-Elemente Methoden und zur Finite-Elemente Theorie. Für solche Partitionen wurden zahlreiche Verfahren zur Hermite-Interpolation mit  $C^1$ - und  $C^2$ -Splines niedrigen Grades entwickelt (siehe [2,12,13,33,38,66,86,87,88,92,95,96,120,121,124,141,142,145,146]). Eine alternative Möglichkeit besteht darin, anstatt beliebige Triangulierungen bzw. Tetraederzerlegungen allgemeine Klassen von Partitionen zu betrachten, und Eigenschaften dieser Klassen zur Konstruktion von Interpolationsmengen zu verwenden. Solche Klassen sind in der bivariaten Splinetheorie beispielsweise die regelmäßigen Rechteckszerlegungen mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck, genannt  $\Delta^1$  bzw.  $\Delta^2$  (vgl. Abbildungen 9 und 16, siehe [89,90,105,106,122,137,138]), Triangulierungen ineinander geschachtelter, geschlossener Polygonzüge (vgl. Abbildung 3, siehe [52,53,55]) oder induktiv konstruierte Triangulierungen (siehe [112,113]). Klassen trivariater Zerlegungen sind beispielsweise regelmäßige Würfelpartitionen (vgl. Abbildung 63, siehe [75,119,135]) oder konstruierte Tetraederzerlegungen (vgl. Abbildungen 57 und 58).

In der vorliegenden Dissertation betrachten wir Lagrange- und Hermite-Interpolation mit bi- und trivariaten Splineräumen  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  auf beliebigen Zerlegungen und allgemeinen Klassen von Zerlegungen  $\Delta$ . Ziel dieser Arbeit ist es, Algorithmen zur Konstruktion von Interpolationsmengen für solche Räume mit niedrigem Polynomgrad  $q$  relativ zur Differenzierbarkeitsordnung  $r$  zu entwickeln. Darüber hinaus besitzen einige der Methoden Lokalität und Optimalität der Approximationsordnung der Interpolation. Bei allen Verfahren können die interpolierenden Splines effizient durch schrittweise Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme bestimmt werden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 befassen wir uns mit den Grundlagen der bivariaten Splinetheorie. Zunächst definieren wir Triangulierungen eines betrachteten polygonalen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und formulieren das Lagrange- und Hermite-Interpolationsproblem mit Splines. Danach beweisen wir einige Aussagen über  $C^1$ - und  $C^2$ -Splines in inneren Knoten der Triangulierung. Unter Verwendung von baryzentrischen Koordinaten geben wir bivariate Polynome in ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung an. Aus dieser Darstellung ergibt sich nach Farin [67] eine einfache Charakterisierung der Differenzierbarkeit von Splinesfunktionen auf benachbarten Dreiecken über eine gemeinsame Kante der Triangulierung. Darauf aufbauend definieren wir minimal bestimmende Mengen von Splineräumen. Die Anzahl der Elemente einer minimal bestimmenden Menge entspricht der Dimension des Splineräums. Für Hermite-Interpolation existiert nach de Boor [22] und Farin [67] ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen eines bivariaten Polynoms und den Koeffizienten seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Im letzten Abschnitt des Kapitels erläutern wir die Approximationsordnung von Splineräumen und beschreiben das Grundprinzip der schwachen Interpolation.

In Kapitel 3 untersuchen wir Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines, d.h. Splines vom Grad 4. Für beliebige Triangulierungen  $\Delta$  bestimmten Alfeld, Piper und Schuma-

ker [3] die Dimension von  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ . Aus den dabei verwendeten nicht-lokalen Argumenten der Graphentheorie ergeben sich im Allgemeinen jedoch keine Interpolationsmengen für diese Räume. Erste allgemeine Ergebnisse über nicht-lokale Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines wurden von Davydov und Nürnberger [54] erzielt, die induktiv Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 4$ , auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  konstruierten, wobei in selten auftretenden Ausnahmefällen einige Dreiecke gesplittet werden. Darüber hinaus existieren zahlreiche Methoden zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  auf speziellen Klassen von Triangulierungen (siehe Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [53], Nürnberger und Zeilfelder [108,112], Nürnberger und Riessinger [105]), sowie Algorithmen zu Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 3$ , auf beliebigen Triangulierungen, bei denen geeignete Dreiecke unterteilt werden (siehe Kohlmüller [84], Nürnberger und Zeilfelder [118], Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [114,117]). Wir entwickeln in Kapitel 3 eine Methode zur Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen, bei der keine Dreiecke unterteilt werden. Solche Triangulierungen  $\Delta$  sind grob gesprochen dadurch charakterisiert, dass eine Teilmenge  $\Delta_s \subset \Delta$  existiert, so dass jeder innere Knoten geraden Grades ein Eckpunkt genau eines Dreiecks in  $\Delta_s$  ist (vgl. Abbildung 9). In Abschnitt 3.1 legen wir zunächst  $\Delta_s$  fest und konstruieren anschließend Pfade für die Eckpunkte der Triangulierung. Diese Pfade bestehen aus geeigneten, nichtdegenerierten Kanten von  $\Delta$ . Dadurch wird insbesondere eine Reihenfolge der Knoten von  $\Delta$  festgelegt. Unter Verwendung von  $\Delta_s$ , dieser Reihenfolge und der Pfade durchlaufen wir in Abschnitt 3.2 die Knoten der Triangulierung und wählen Lagrange-Interpolationspunkte für  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ .

In Kapitel 4 befassen wir uns mit lokaler Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen und untersuchen die Approximationsgüte der Interpolation. Nürnberger und Zeilfelder [118] entwickelten ein Verfahren zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 3$  auf beliebigen Triangulierungen, das optimale Approximationsordnung besitzt. Dabei werden etwa die Hälfte der Dreiecke unterteilt. Später konstruierte Kohlmüller [84] auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  Punktmengen zur nicht-lokalen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 3$ , mit fast optimaler Approximationsordnung, wobei im Allgemeinen nur etwa ein Viertel der Dreiecke gesplittet werden. Wir geben in diesem Kapitel den ersten Algorithmus zur Konstruktion von lokalen Lagrange-Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  an, bei dem nur wenige Dreiecke unterteilt werden, so dass die Interpolation optimale Approximationsordnung besitzt. In Abschnitt 4.1 werden beliebige Triangulierungen algorithmisch mithilfe von Clough-Tocher-Splits verfeinert, bis in den resultierenden Triangulierungen  $\tilde{\Delta}$  keine zwei benachbarten inneren Knoten geraden Grad besitzen (vgl. Abbildungen 16 und 17). Die Anzahl der Unterteilungen ist dabei deutlich geringer als bei dem von Nürnberger und Zeilfelder [118] entwickelten Verfahren. Darauf aufbauend konstruieren wir in Abschnitt 4.2 Lagrange-Interpolationspunkte für  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ . Anschließend weisen wir Lokalität der Interpolation nach. Mithilfe der von Nürnberger et. al. [56,107,110,118] entwickelten Techniken der schwachen Interpolation zeigen wir im letzten Abschnitt des Kapitels, dass diese Interpolationsmethode optimale Approximationsordnung besitzt.

In Kapitel 5 betrachten wir  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 5$ . In einer frühen Arbeit bestimmten Morgan und Scott [101] auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  die Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , ohne dabei Bézier-Bernstein-

Techniken zu verwenden. Davydov [50] konstruierte dazu alternative Interpolationsmengen, bei denen die Basisfunktionen der interpolierenden Splineräume lokal linear unabhängig sind. Für Supersplineräume vom Grad  $q \geq 3r + 2$  entwickelten Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] eine Methode zur lokalen Hermite-Interpolation, die optimale Approximationsordnung besitzt. Darüber hinaus gaben Davydov und Nürnberger [54] einen Algorithmus zur nicht-lokalen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  an. Wir entwickeln in Kapitel 5 die erste Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 5$  auf beliebigen Triangulierungen, bei der keine Dreiecke gesplittet werden, und die optimale Approximationsordnung besitzt. Zunächst zerlegen wir die Triangulierung in Klassen von Dreiecken und ordnen jedem inneren, nichtsingulären Knoten eine geeignete, nichtdegenerierte Kante als Pfad zu (vgl. Abbildungen 29 und 30). In Abschnitt 5.2 wählen wir dann unter Verwendung dieser Pfade für  $q \geq 5$  Interpolationspunkte für die Klassen von Dreiecken und konstruieren so lokale Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ . Mithilfe der Techniken der schwachen Interpolation beweisen wir in Abschnitt 5.3, dass dieses Verfahren zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , optimale Approximationsordnung besitzt.

In Kapitel 6 untersuchen wir den Splinerraum  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ . Bei der Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad  $\leq 7$ , ohne Unterteilung von Dreiecken, wurden bisher lediglich Klassen von Triangulierungen betrachtet. Nürnberger und Riessinger [105] konstruierten auf den regelmäßigen Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  für beliebiges  $q$  und  $r$  Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^r(\Delta^i)$ ,  $i = 1, 2$ . Darüber hinaus zeigten Nürnberger und Zeilfelder [112,113], dass ihre Methode zur Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad  $\geq 5$  auf induktiv konstruierten Triangulierungen auch auf  $\Delta^2$ -Zerlegungen angewandt werden kann. Alfeld und Schumaker [6] untersuchten Triangulierungen  $\Delta$ , in denen weder degenerierte Kanten noch singuläre Knoten auftreten (vgl. Abbildung 2), und gaben Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_{3r+1}^r(\Delta)$ ,  $r \geq 2$ , an. Wir entwickeln in diesem Kapitel das erste Verfahren zur Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen, die sowohl degenerierte Kanten als auch singuläre Knoten enthalten können, wobei keine Dreiecke unterteilt werden. Solche in Abschnitt 6.1 beschriebenen Triangulierungen, zu denen auch  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  gehören, sind dadurch charakterisiert, dass für jeden inneren, nichtsingulären Knoten zyklische Pfade zu Randknoten oder singulären Knoten existieren (vgl. Abbildungen 40, 41 und 46). Unter Verwendung dieser Pfade bestimmen wir in Abschnitt 6.2 die Dimension von  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ . In Abschnitt 6.3 legen wir Hermite-Interpolationsbedingungen für diesen Splinerraum fest. Abschließend geben wir einen zweistufigen Algorithmus an, der aus einer gegebenen, nicht in obiger Klasse enthaltenen Triangulierung mithilfe weniger Clough-Tocher-Splits eine für obige Interpolationsmethode geeignete Triangulierung erzeugt.

In Kapitel 7 betrachten wir Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$ . Für  $C^r$ -Splines vom Grad  $q \geq 3r + 2$  bestimmte Hong [77] die Dimension der Splineräume  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ . Diese Ergebnisse wurden von Ibrahim und Schumaker [78] auf Supersplineräume verallgemeinert. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] entwickelten eine Methode zur lokalen Hermite-Interpolation mit diesen Räumen. Darüber hinaus existieren zahlreiche Methoden zur Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Splines niedrigen Grades auf speziellen Klassen von Triangulierungen (siehe Nürnberger und Riessinger [105], Nürnberger und Zeilfelder [112,113]). Wir beschreiben in diesem Kapitel die erste



Methode zur Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ . In einer Verallgemeinerung des Verfahrens von Davydov und Nürnberger [54] auf  $C^2$ -Splines zerlegen wir dabei in Abschnitt 7.1 zunächst  $\Delta$  in eine Kette von Subtriangulierungen, indem wir ausgehend von einem Startdreieck induktiv Dreiecke von  $\Delta$  anhängen (siehe auch Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [55]). Für  $q = 7$  wird in Ausnahmefällen die Triangulierung geringfügig durch wenige Clough-Tochter-Splits verfeinert. Für  $q \geq 8$  sind zur Interpolation keine solchen Unterteilungen notwendig. Mithilfe dieser Zerlegung bestimmen wir in Abschnitt 7.2 die Dimension von  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ , wobei wir die durch die Zerlegung entstandenen Semisingularitäten berücksichtigen. Für  $q \geq 8$  verwenden wir die Ergebnisse von Ibrahim und Schumaker [78] über die Dimension von  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ . Darauf aufbauend wählen wir induktiv Lagrange-Interpolationspunkte für  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$ . Ähnlich der Methoden von Davydov und Nürnberger [54], Nürnberger und Riessinger [105] und Nürnberger und Zeilfelder [112,113] ist Hermite-Interpolation als Grenzwert der Lagrange-Interpolation interpretierbar.

In Kapitel 8 stellen wir die Grundlagen der trivariaten Splinetheorie dar. Tetraederzerlegungen eines polyederförmigen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , stückweise trivariate Polynome sowie die trivariaten Bézier-Bernstein-Techniken ergeben sich analog zum bivariaten Fall.

In Kapitel 9 untersuchen wir Interpolation mit trivariaten  $C^1$ -Supersplines vom Grad  $\geq 6$ . Bereits in einer frühen Arbeit der Finite-Elemente Theorie betrachtete Ženišek [145] Supersplineräume  $\mathcal{S}_q^{r,4r}(\Delta)$  auf beliebigen Tetraederzerlegungen  $\Delta$  mit relativ hohem Polynomgrad  $q \geq 8r + 1$ . Lokale Hermite-Interpolation mit  $C^1$ -Splines niedrigen Grades ist möglich, wenn ausgehend von beliebigen Tetraederzerlegungen jeder Tetraeder in vier (siehe Alfeld [2]) bzw. zwölf (siehe Farin und Worsey [144]) Subtetraeder zerlegt wird. Diese beiden Verfahren verallgemeinern das bivariate Clough-Tochter Element. Ferner wurde von Lai und LeMéhauté [98] eine Methode zur lokalen Hermite-Interpolation mit  $\mathcal{S}_5^{1,2}(\Delta)$  auf einer vorgegebenen Klasse von speziellen Tetraederzerlegungen entwickelt. Darüber hinaus wurden bereits verschiedene Klassen gleichmäßiger Würfelpartitionen untersucht. Schumaker und Sorokina [135] konstruierten Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für  $C^1$ -Supersplines vom Grad 5 auf einer Zerlegung, bei der jeder Würfel in fünf Tetraeder unterteilt wird. Diese Methode verallgemeinert den Ansatz von Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [116] zur Interpolation mit bivariaten Splines auf sogenannten Schachbrett-Viereckspartitionen. Vor kurzem wurde die Frage nach der Dimension von  $C^1$ -Splines beliebigen Grades auf Zerlegungen jeden Würfels in 24 Tetraeder geklärt (siehe Hangelbroek, Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [75]). Darauf aufbauend gaben Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [119] eine Methode zur Volumenapproximation mit quadratischen Supersplines an. Wir entwickeln in Kapitel 9 den ersten Algorithmus zur Konstruktion von Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Supersplineräume  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , auf allgemeinen Klassen von Tetraederzerlegungen  $\Delta$ , wobei keine Tetraeder unterteilt werden. Solche Zerlegungen werden, wie in Abschnitt 9.1 beschrieben, induktiv konstruiert, indem ausgehend von einem Starttetraeder weitere Tetraeder in Form von Ketten (vgl. Abbildung 57) und Halbzellen (vgl. Abbildung 58) angehängt werden. In Abschnitt 9.2 geben wir zunächst induktiv für  $q \geq 6$  minimal bestimmende Mengen für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$  an. In Abschnitt 9.3 bzw. 9.4 konstruieren wir darauf aufbauend schrittweise Hermite- bzw. Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume auf ganz  $\Delta$ .

Ergänzend betrachten wir den Fall gegebener Tetraederzerlegungen ohne Unterteilung von

Tetraedern. Wir skizzieren ein Verfahren von Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] zur Bestimmung der Dimension von  $C^1$ -Splines beliebigen Grades auf der Tetraederzerlegung einer gleichmäßigen Würfelpartition. Bei dieser Zerlegung, die aus einer Verallgemeinerung der bivariaten  $\Delta^1$ -Triangulierung entsteht, wird jeder Würfel in sechs Tetraeder unterteilt (vgl. Abbildung 63). Zunächst betrachten Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] die Zerlegung eines einzelnen Würfels. Anschließend durchlaufen sie induktiv die Würfel der Partition und konstruieren minimal bestimmende Mengen für  $C^1$ -Splines auf der gesamten Zerlegung  $\Delta^1$ .

An dieser Stelle möchte ich den Herrn Prof. Dr. G. Nürnberger und PD Dr. Frank Zeilfelder für ihre uneingeschränkte Unterstützung, interessanten Anregungen und ihre stets vorhandene, konstruktive Gesprächsbereitschaft herzlichst danken.

## Kapitel 2:

# Grundlagen der bivariaten Theorie

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen der bivariaten Splinetheorie, die auf Alfeld, Piper und Schumaker [3,5], de Boor [20,22,23], Farin [67], Nürnberger [104,107], Schumaker [129,131] u.a. zurückgehen. In Abschnitt 2.1 definieren wir Triangulierungen  $\Delta$  eines betrachteten polygonalen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und definieren einige zentrale Begriffe. Bivariate Polynome und Splines sowie das Lagrange- und Hermite-Interpolationsproblem beschreiben wir in Abschnitt 2.2. Außerdem beweisen wir einige Aussagen über  $C^1$ - und  $C^2$ -Splines in inneren Knoten von  $\Delta$ . Im Rahmen der Bézier-Bernstein-Techniken definieren wir in Abschnitt 2.3 baryzentrische Koordinaten und die darauf basierende Bézier-Bernstein-Darstellung bivariater Polynome. Diese liefert nach Farin [67] eine einfache Charakterisierung der Differenzierbarkeit bivariater Splines auf benachbarten Dreiecken von  $\Delta$  über die gemeinsame Kante. Ferner definieren wir minimal bestimmende Mengen von Splineräumen. Nach de Boor [22] und Farin [67] existiert für die Hermite-Interpolation ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen eines bivariaten Polynoms und den Koeffizienten seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Im letzten Abschnitt beschreiben wir das Grundprinzip der schwachen Interpolation im Kontext der Approximationsgüte von Interpolationsmethoden.

## 2.1 Triangulierungen

### Definition 2.1:

Sei  $\Omega$  eine einfach zusammenhängende, polygonale Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , zerlegt in Dreiecke  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so dass der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante ist. Dann heißt  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine TRIANGULIERUNG von  $\Omega$  (vgl. Abbildung 1). Ist  $\Delta' \subset \Delta$  eine Triangulierung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge  $\Omega' \subset \Omega$ , so heißt  $\Delta'$  SUBTRIANGULIERUNG von  $\Delta$ .

Im Weiteren setzen wir

$V_I(\Delta)$ , $V_B(\Delta)$ , $V(\Delta)$	: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
$E_I(\Delta)$ , $E_B(\Delta)$ , $E(\Delta)$	: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten,
$N(\Delta)$	: Menge der Dreiecke,
$\sigma(\Delta)$	: Anzahl der singulären Knoten (vgl. Abbildung 2) und
$ \Delta $	: maximale Kantenlänge der Dreiecke

der Triangulierung  $\Delta$ .

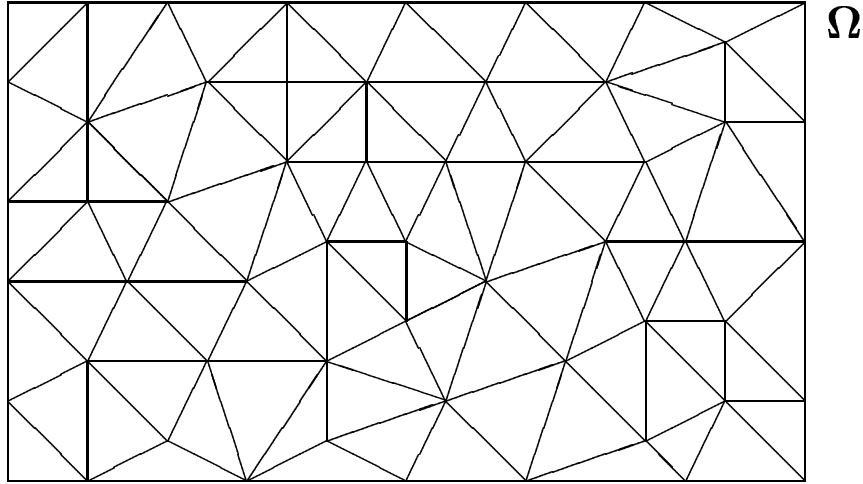


Abb. 1: Triangulierung eines einfach zusammenhängenden Gebiets  $\Omega$ .

Nach Leonhard Euler gelten folgende wohlbekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \#E_B(\Delta) &= \#V_B(\Delta), \\ \#E_I(\Delta) &= 3\#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 3, \\ \#N(\Delta) &= 2\#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 2. \end{aligned}$$

Wir sagen zwei Dreiecke der Triangulierung **BERÜHREN EINANDER**, falls sie einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Haben Sie eine gemeinsame Kante, so heißen die Dreiecke **BENACHBART**. Zwei Kanten  $e_1, e_2 \in E(\Delta)$  mit gemeinsamem Endpunkt heißen **KOLINEAR**, falls sie die gleiche Steigung besitzen, **FAST-KOLINEAR**, falls der von  $e_1$  und  $e_2$  eingeschlossene Winkel  $\approx \pi$  ist, und **BENACHBART**, falls es ein Dreieck in  $\Delta$  gibt, das  $e_1$  und  $e_2$  als Kante besitzt. Eine Kante  $e := [v_1, v_2] \in E(\Delta)$  heißt **(FAST-)DEGENERIERT IM ENDPUNKT  $v_1$** , falls die beiden benachbarten Kanten im Knoten  $v_1$  (fast-)kolinear sind. Andernfalls heißt  $e$  **NICHTDEGENERIERT**. Ein Knoten  $v \in V_I(\Delta)$  heißt **SINGULÄR**, falls es genau vier Kanten mit Endpunkt  $v$  gibt, und diese auf zwei Geraden liegen (vgl. Abbildung 2). Liegt  $v \in V(\Delta)$  am Rande einer Subtriangulierung  $\Delta'$ , so heißt  $v$  **SEMISINGULÄR VOM TYP  $i$** ,  $i \in \{1, 2\}$ , bzgl.  $\Delta'$ , wenn es genau  $i$  Kanten mit Endpunkt  $v$  in  $\Delta$  gibt, die nicht in  $\Omega'$  liegen, und diese in  $v$  degeneriert sind.

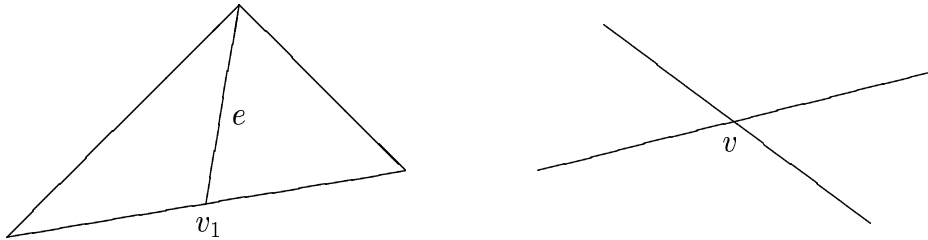


Abb. 2: In  $v_1$  degenerierte Kante  $e$  (links), singulärer Knoten  $v$  (rechts).

Für einen Knoten  $v \in V(\Delta)$  definiert  $\text{Grad}(v)$  die Anzahl der Kanten in  $E(\Delta)$  mit Endpunkt  $v$ . Mit  $\Delta_v := \{T \in \Delta \mid v \in T\}$  bezeichnen wir die ZELLE von  $v$ , die Subtriangulierung von  $\Delta$  des Gebiets  $st(v) = \cup\{T \in \Delta \mid v \in T\} \subset \Omega$ , die alle Dreiecke mit Eckpunkt  $v$  enthält. Für  $n \geq 2$  definieren wir induktiv (vgl. Abbildung 3):

$$st^n(v) = \cup\{T \in \Delta \mid T \cap st^{n-1}(v) \neq \emptyset\} \subset \Omega.$$

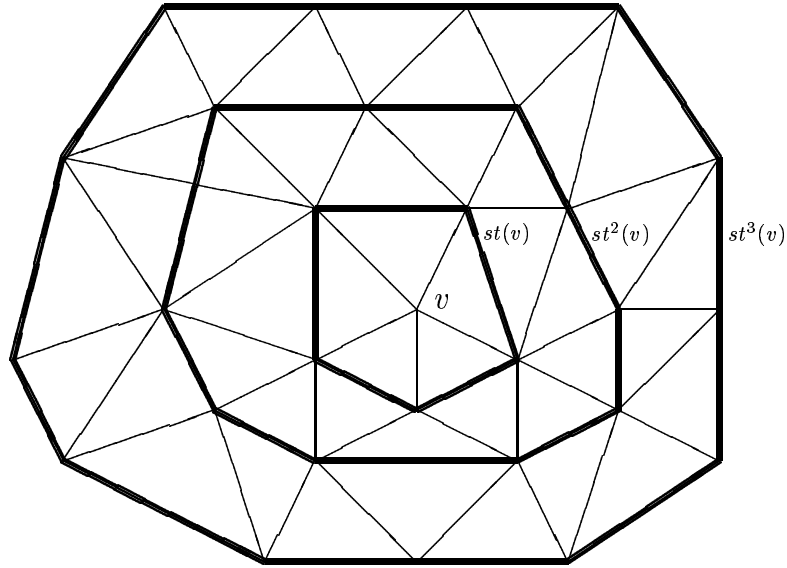


Abb. 3:  $st(v)$ ,  $st^2(v)$  und  $st^3(v)$  für einen Knoten  $v \in V(\Delta)$ .

## 2.2 Splineräume und Interpolation

### Definition 2.2:

Seien  $r, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq r < q$  und eine Triangulierung  $\Delta$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  gegeben. Dann heißt

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

der SPLINERAUM der  $r$  mal differenzierbaren Funktionen vom Grad  $q$ . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$$

der  $\binom{q+2}{2}$  dimensionale Raum der BIVARIATEN POLYNOME vom totalen Grad  $\leq q$  und  $C^r(\Omega)$  die Menge aller  $r$  mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Gibt es zusätzlich natürliche Zahlen  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, d := \#V(\Delta)$ , die die Bedingungen  $r \leq \rho_i < q$ ,  $i = 1, \dots, d$ , erfüllen, dann definiert für  $\theta = (\rho_1, \dots, \rho_d)$

$$\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) = \{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta) : s \in C^{\rho_i}(v_i), i = 1, \dots, d\}$$

den SUPERSPLINERAUM von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  vom Grad  $\theta$ , einen Teilraum von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ .

Funktionen aus  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$  sind stückweise Polynome vom Grad  $q$ , die  $r$  mal stetig differenzierbar über die Kanten von  $\Delta$  verknüpft sind und  $C^\theta$ -Supersplineeigenschaft in den Knoten von  $\Delta$  besitzen. Bei der Interpolation mit Splines gibt es folgendes fundamentales Problem:

**Problemstellung 2.3:**

Finde eine Menge  $\mathcal{L} = \{z_1, \dots, z_m\} \subset \Omega$  mit  $m = \dim(\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta))$ , so dass zu jeder Vorgabe reeller Zahlen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , genau ein Spline  $s \in \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$  existiert, für den gilt

$$s(z_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Eine solche Menge heißt LAGRANGE-INTERPOLATIONSMENGE für  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ . Die Werte  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , können dabei auch von einer Funktion  $f \in C(\Omega)$  stammen. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion  $f$  interpoliert, dann heißt eine Menge  $\mathcal{H}$ , bestehend aus  $m$  solchen Bedingungen zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ , eine HERMITE-INTERPOLATIONSMENGE für  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ . Eine Interpolationsmenge heißt LOKAL, falls die Abänderung eines Wertes  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , den interpolierenden Spline nur in der Nähe des Punktes  $z_i$  beeinflusst.

**Definition 2.4:**

Sei  $m = \dim(\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta))$  und  $\mathcal{L} = \{z_1, \dots, z_m\}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ . Dann heißen die Splines  $s_i \in \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit der Eigenschaft

$$s_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

FUNDAMENTALSPLINES bzgl.  $\mathcal{L}$ . Die Menge  $\{s_1, \dots, s_m\}$  bildet offensichtlich eine Basis von  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ , genannt die DUALE BASIS bzgl.  $\mathcal{L}$ .

In der frühen Splineliteratur gibt es ein allgemeines Ergebnis von Schumaker [131] über die Dimension bivariater Splineräume. Für beliebige  $q$  und  $r$  sowie beliebige Triangulierungen  $\Delta$  existiert eine untere Schranke  $lb_q^r(\Delta)$  für die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ . Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^r(\Delta)) \geq lb_q^r(\Delta) = \binom{q+2}{2} + \binom{q-r+1}{2} \#E_I(\Delta) - \left[ \binom{q+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right] \#V_I(\Delta) + \sum_{i=1}^{\#V_I(\Delta)} \sigma_i.$$

Dabei ist  $\sigma_i = \sum_{j=1}^{q-r} (r+j+1 - j e_i)_+$  und  $e_i$  die Anzahl der Kanten der Triangulierung mit Endpunkt  $v_i$ , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen.

Für einen Einheitsvektor  $d \in \mathbb{R}^2$  und eine genügend oft differenzierbare Funktion  $p$  bezeichnen wir mit  $p_d(z)$  die partielle Ableitung von  $p$  im Punkt  $z$  in Richtung  $d$ . Sind  $d_1$  und  $d_2$  linear unabhängige Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w p(z) = (p_{d_1^w}(z), p_{d_1^{w-1}d_2}(z), \dots, p_{d_1d_2^{w-1}}(z), p_{d_2^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad  $w$ .

Wir untersuchen nun  $C^1$ -Splines in inneren Knoten ungeraden Grades. Sei  $v \in V_I(\Delta)$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ , durch Kanten  $e_i := [v, v_i]$ . Ferner sei  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$ ,  $\Delta_v := \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ , ( $v_{n+1} = v_1$ ), die Zelle von  $v$ ,  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$  eingeschlossene Winkel und  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta_v)$ ,  $q \geq 2$ , gegeben durch  $s|_{T_i} \equiv p^{[T_i]}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , (vgl. Abbildung 4).

**Lemma 2.5:**

Aus  $p_{d_i^2}^{[T_i]}(v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , folgt  $p_{d_{i+1}d_i}^{[T_i]}(v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Beweis:**

Sind alle Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , in  $v$  nichtdegeneriert, so gilt

$$\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})p_{d_{i+1}d_i}^{[T_i]} = \sin(\alpha_i)p_{d_{i+1}d_{i+2}}^{[T_{i+1}]} + \sin(\alpha_{i+1})p_{d_i d_{i+1}}^{[T_i]}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir setzen  $a_i := \sin(\alpha_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , lässt sich folgendes lineares Gleichungssystem aufstellen

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ p_{d_2 d_3}^{[T_2]} \\ \vdots \\ p_{d_{n-1} d_n}^{[T_{n-1}]} \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix lautet:

$$D = \prod_{i=1}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i = 2 \prod_{i=1}^n a_i.$$

Ist eine Kante  $e_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , in  $v$  degeneriert, so gilt  $p_{d_{j-1}d_j}^{[T_{j-1}]} = -p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}$  und damit

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{d_1 d_2}^{[T_1]} \\ \vdots \\ p_{d_{j-1} d_j}^{[T_{j-1}]} \\ p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]} \\ \vdots \\ p_{d_n d_1}^{[T_n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit  $\sin(\alpha_{j-1}) = \sin(\pi - \alpha_j) = \sin(\alpha_j)$  folgt

$$D = \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i = 2 \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i.$$

Aus  $\alpha_i \in (0, \pi)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , folgt  $D > 0$  und damit die Behauptung.

#

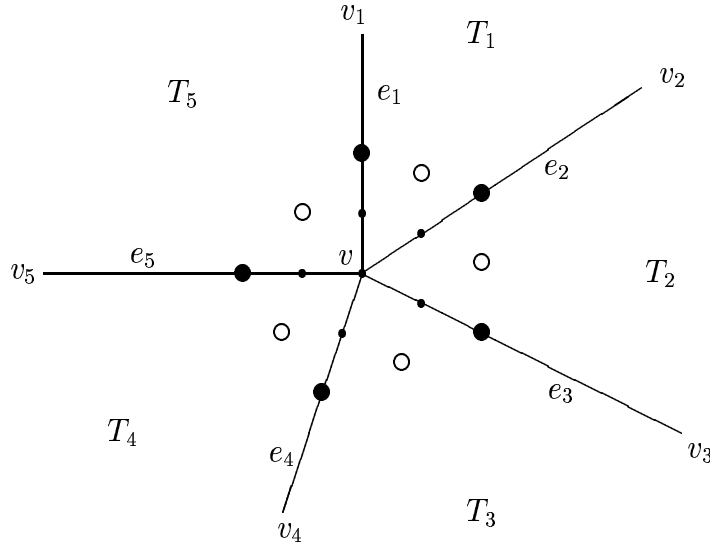


Abb. 4: Die gemischten Ableitungen  $\circ$  ergeben sich aus den Ableitungen  $\bullet$ .

Wir betrachten nun zwei  $C^2$ -differenzierbar verknüpfte Polynome auf benachbarten Dreiecken. Seien  $e_i = [v, v_i]$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , drei aufeinanderfolgende Kanten im gemeinsamen Endpunkt  $v$  mit paarweise verschiedenen Steigungen,  $\alpha_i$  für  $i = 1, 2$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$  eingeschlossene Winkel sowie  $d_i$  für  $i = 1, \dots, 3$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$ . Ferner seien für  $q \geq 2$  die Polynome  $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$ ,  $i = 1, 2$ , auf  $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$  zweimal stetig differenzierbar über  $e_2$  verknüpft (vgl. Abbildung 5, links).

**Lemma 2.6:**

Aus  $p_{d_1^2}^{[T_1]}(v)$ ,  $p_{d_2^2}^{[T_1]}(v)$  und  $p_{d_3^2}^{[T_2]}(v)$  lassen sich  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v)$  und  $p_{d_2 d_3}^{[T_2]}(v)$  eindeutig berechnen.

**Beweis:**

Da  $e_2$  in  $v$  nichtdegeneriert ist, gilt

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin(\alpha_1) p_{d_2 d_3}^{[T_2]} + \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_2}^{[T_1]}.$$

Durch nochmaliges anwenden erhalten wir

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} = \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]} + 2 \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_3}^{[T_1]} + \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]}.$$

Mit  $\sin(\alpha_i) = \sin(2\pi - \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}) = -\sin(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})$  ersetzen wir die gemischte partielle Ableitung. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} &= \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]} + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2) p_{d_1 d_2}^{[T_1]} - \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]}, \\ \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2^2}^{[T_1]} &= \sin^2(\alpha_2) p_{d_1^2}^{[T_1]} + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1) p_{d_2 d_3}^{[T_2]} - \sin^2(\alpha_1) p_{d_3^2}^{[T_2]}. \end{aligned}$$

Da  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ , lassen sich die gesuchten Ableitungen isolieren. Es folgt die Behauptung.

#



Seien jetzt  $e_i = [v, v_i]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , vier aufeinanderfolgende Kanten im gemeinsamen Endpunkt  $v$  mit paarweise verschiedenen Steigungen,  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, 3$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$  eingeschlossene Winkel und  $d_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$ . Ferner seien für  $q \geq 3$  die Polynome  $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , auf  $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$  zweimal stetig differenzierbar über den Kanten  $e_i$ ,  $i = 2, 3$ , verknüpft (vgl. Abbildung 5 rechts).

**Lemma 2.7:**

Aus  $p_{d_1^2 d_2}^{[T_1]}(v)$ ,  $p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]}(v)$ ,  $p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]}(v)$  und  $p_{d_3 d_4^2}^{[T_3]}(v)$  lässt sich der Vektor

$$(p_{d_2^3}^{[T_2]}(v), p_{d_2^2 d_3}^{[T_2]}(v), p_{d_2 d_3^2}^{[T_2]}(v), p_{d_3^3}^{[T_2]}(v))$$

eindeutig berechnen.

**Beweis:**

Sei  $x_i := p_{d_2^{3-i} d_3^i}^{[T_2]}(v)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ ,  $a_i := \sin(\alpha_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , und  $b_i := \sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})$ ,  $i = 1, 2$ .

Dann ergeben die  $C^1$ - und  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_2$  und  $e_3$  analog dem Beweis von Lemma 2.6 folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & -a_1^2 & 0 \\ 0 & -a_3^2 & 0 & b_2^2 \\ b_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 b_1 p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]} - a_2^2 p_{d_1^2 d_2}^{[T_1]} \\ 2a_2 b_2 p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]} - a_2^2 p_{d_3 d_4^2}^{[T_3]} \\ a_2 p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]} \\ a_2 p_{d_3^2 d_4}^{[T_3]} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante  $D$  der Koeffizientenmatrix lautet

$$D = a_1 a_3 b_1 b_2 (b_1 b_2 - a_1 a_3).$$

Da  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ ,  $i = 1, 2$ , sowie  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  von  $\pi$  verschieden sind, gilt  $D \neq 0$ . Damit ist  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  eindeutig bestimmt.

#

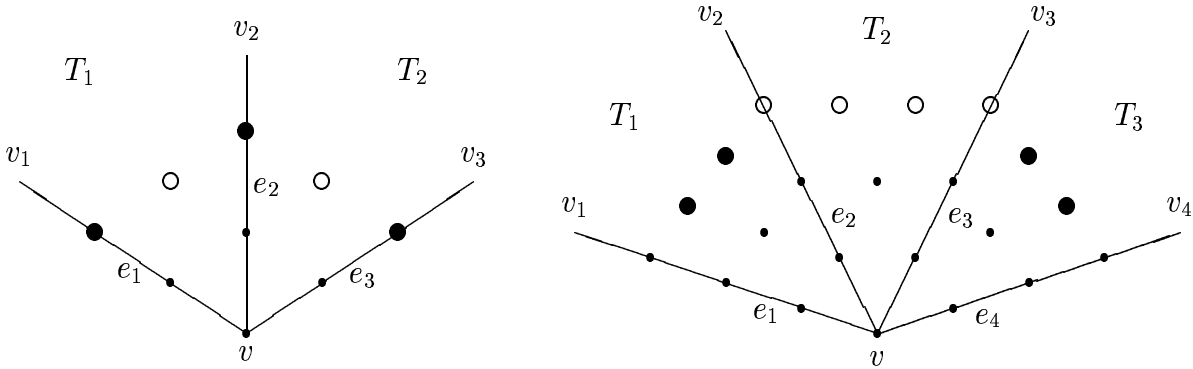


Abb. 5: Die gemischten Ableitungen  $\circ$  ergeben sich aus den Ableitungen  $\bullet$ .

## 2.3 Bézier-Bernstein-Methoden

Sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck im  $\mathbb{R}^2$ . Dann gibt es für alle  $z \in \mathbb{R}^2$  eindeutig bestimmte BARYZENTRISCHE KOORDINATEN  $\phi_1, \dots, \phi_3$  mit  $\sum_{i=1}^3 \phi_i = 1$  und der Interpolationseigenschaft  $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$ , so dass sich  $z$  als

$$z = \sum_{i=1}^3 \phi_i(z) \cdot v_i$$

schreiben lässt. Diese Koordinaten sind lineare Polynome in  $z$ , invariant unter affinen Transformationen der Ebene. Sie lassen sich mithilfe der Formel

$$\phi_i(z) = \frac{\det(v_j - z \quad v_k - z)}{\det(v_j - v_i \quad v_k - v_i)}$$

für paarweise verschiedene  $1 \leq i, j, k \leq 3$  explizit berechnen (vgl. Abbildung 6).

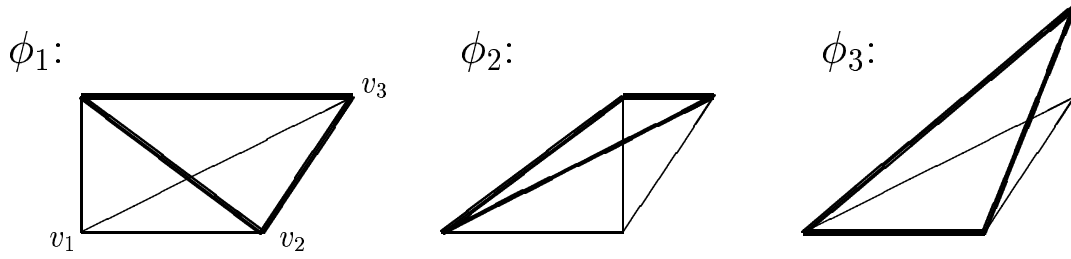


Abb. 6: Baryzentrische Koordinaten bzgl. eines Dreiecks.

Für ein Dreieck  $T$  und  $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$  mit  $i + j + k = q$  definiert  $B_{i,j,k}^q \in \mathcal{P}_q$ , gegeben durch

$$B_{i,j,k}^q(z) = \frac{q!}{i! \cdot j! \cdot k!} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k)(z),$$

ein BERNSTEIN-POLYNOM vom Grad  $q$  bzgl.  $T$ .

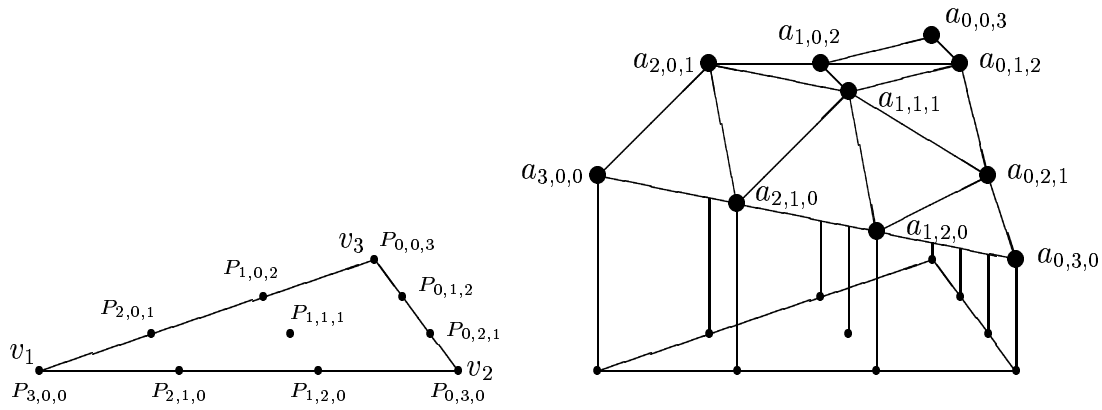
Die Menge aller Bernstein-Polynome vom Grad  $q$  bildet eine Basis von  $\mathcal{P}_q$ . Jedes Polynom  $p \in \mathcal{P}_q$  lässt sich somit in eindeutiger Weise als

$$p(z) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k}^{[T]} \cdot B_{i,j,k}^q(z)$$

schreiben, genannt die BÉZIER-BERNSTEIN-DARSTELLUNG von  $p$ . Die reellen Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T]}$ ,  $i + j + k = q$ , heißen BÉZIER-BERNSTEIN-KOEFFIZIENTEN. Sie bilden zusammen mit den gleichverteilten BÉZIER-BERNSTEIN-PUNKTEN

$$\mathcal{M}_T = \left\{ P_{i,j,k}^{[T]} = \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3}{q}, \quad i + j + k = q \right\}$$

das BÉZIER-BERNSTEIN-NETZ  $\{(P_{i,j,k}^{[T]}, a_{i,j,k}^{[T]})\}$ ,  $i + j + k = q$  über  $T$  (vgl. Abbildung 7).

Abb. 7: Bézier-Bernstein-Punkte und Bézier-Bernstein-Netz für  $q = 3$ .

Für  $0 \leq w \leq q$  bezeichnen wir mit

$$R_w(v) := \{P_{q-w,i,j}^{[T]} \mid i+j=w, T = \Delta(v, u_1, u_2) \in \Delta\}$$

den RING der Bézier-Bernstein-Punkte mit Abstand  $w$  vom Knoten  $v$ . Die SCHEIBE MIT RADIUS  $w$  um den Knoten  $v$  ist dann definiert als

$$D_w(v) = \bigcup_{i=0}^w (R_i(v)).$$

Sei  $\mathcal{M}(\Delta) := \cup_{T \in \Delta} \mathcal{M}_T$  die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte der Triangulierung  $\Delta$  und für alle  $i+j+k=q$  und alle Dreiecke  $T \in \Delta$  das lineare Funktional

$$\lambda_{P_{i,j,k}^{[T]}} : \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d. d.} \quad s \longrightarrow \lambda_{P_{i,j,k}^{[T]}}(s) = a_{i,j,k}^{[T]}$$

gegeben. Dann heißt  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\Delta)$  eine BESTIMMENDE MENGE für  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ , falls gilt

$$\lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{M} \quad \implies \quad \lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{M}(\Delta).$$

$\mathcal{M}$  heißt MINIMAL, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Ein grundlegendes Prinzip der Bézier-Bernstein-Techniken ist, mit diesen linearen Funktionalen eine bestimmende Menge  $\mathcal{M}$  für  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  zu konstruieren. Damit ist  $\#\mathcal{M}$  eine obere Schranke für die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ . Gilt darüber hinaus  $\#\mathcal{M} = lb_q^r(\Delta)$ , ( $lb_q^r(\Delta)$  die untere Schranke von Schumaker [131]), so ist  $\mathcal{M}$  eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  und die Dimension von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  gleich der Anzahl der Elemente in  $\mathcal{M}$ .

Nach Farin [67] (vgl. de Boor [22]) ist die Differenzierbarkeit bivariater Polynome auf benachbarten Dreiecken über die gemeinsame Kante hinweg durch Bedingungen an die Koeffizienten ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung charakterisiert (vgl. Abbildung 8). Seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$  zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante  $[v_1, v_2]$  und  $s \in \mathcal{S}_q^0(\{T_1, T_2\})$ , definiert durch  $s|_{T_m} \equiv p_m \in \mathcal{P}_q$ ,  $m = 1, 2$ , gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[m]}$ ,  $i+j+k=q$ ,  $m = 1, 2$ .

**Lemma 2.8:**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i)  $s \in C^r(\{T_1, T_2\})$

(ii) Für  $\rho = 0, \dots, r$  und alle  $i + j = q - \rho$  gilt

$$a_{i,j,\rho}^{[2]} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\rho} a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}^{[1]} \frac{\rho!}{\alpha!\beta!\gamma!} (\phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma)(v_4).$$

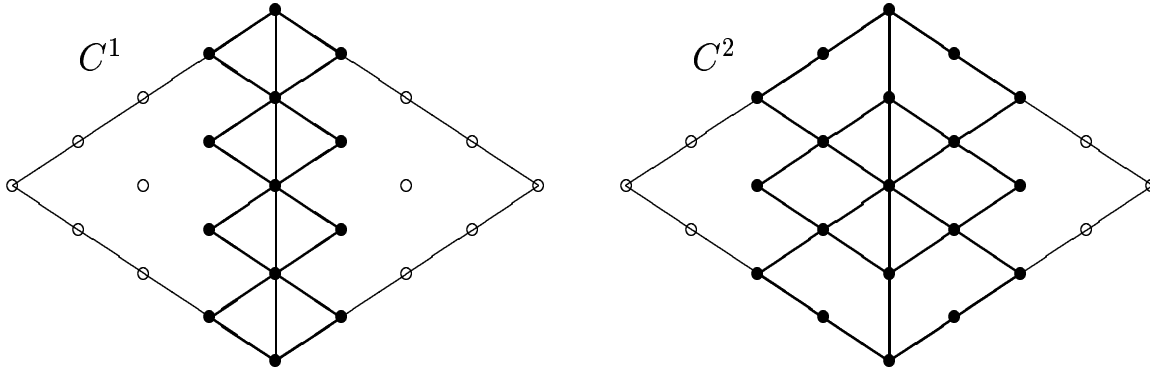


Abb. 8:  $C^1$ - bzw.  $C^2$ -Differenzierbarkeitsbedingungen mit relevanten Koeffizienten  $\bullet$ .

Für  $C^2$ -differenzierbar verknüpfte Polynome gibt es eine wichtige Folgerung. Seien  $T_1, T_2, p_1, p_2$  gegeben wie in Lemma 2.8 und es gelte  $s \in \mathcal{S}_q^2(\{T_1, T_2\})$ ,  $q \geq 2$ , sowie  $i + j = q - 2$ .

**Korollar 2.9:**

Aus  $b_{i,j,2}$ ,  $a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 2$  mit  $(\alpha, \beta, \gamma) \notin \{(0, 1, 1), (0, 2, 0)\}$ , und entweder  $a_{i,j+1,1}$  oder  $a_{i,j+2,0}$  lassen sich alle Koeffizienten  $a_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}$ ,  $b_{i+\alpha,j+\beta,\gamma}$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 2$ , eindeutig berechnen.

Im Folgenden stellen wir eine von Nürnberger und Zeilfelder [112, Seite 362] bewiesene Aussage vor (vgl. Lemma 2.7, Abbildung 5, rechts). Seien  $e_m$ ,  $m = 1, \dots, 4$ , vier aufeinanderfolgende Kanten im gemeinsamen Endpunkt  $v$  mit paarweise verschiedenen Steigungen. Für  $q \geq 3$  und  $T_m = \Delta(v, v_m, v_{m+1})$ ,  $m = 1, \dots, 3$ , seien  $p^{[T_m]} \in \mathcal{P}_q$ ,  $m = 1, \dots, 3$ , gegeben in ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T_m]}$ ,  $i + j + k = q$ , zweimal stetig differenzierbar über die Kanten  $e_m$ ,  $m = 2, 3$ , verknüpft.

**Lemma 2.10:**

Aus  $D_2(v)$ ,  $a_{q-3,2,1}^{[T_1]}$ ,  $a_{q-3,1,2}^{[T_1]}$ ,  $a_{q-3,1,2}^{[T_3]}$  und  $a_{q-3,2,1}^{[T_3]}$  lassen sich die Koeffizienten  $a_{q-3,m,3-m}^{[T_2]}$ ,  $m = 0, \dots, 3$ , eindeutig berechnen.

Nach Farin [22] und de Boor [67] können partielle Ableitungen von Bézier-Bernstein-Poly-nomen entlang Einheitsvektoren mithilfe baryzentrischer Koordinaten ausgedrückt werden.

**Lemma 2.11:**

Die  $r$ -te Richtungsableitung des Bézier-Bernstein-Polynoms  $B_{i,j,k}^q$  entlang eines Einheitsvektors  $d \in \mathbb{R}^2$  ist für alle  $z \in \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$(B_{i,j,k}^q)_{d^r}(z) = \frac{q!}{(q-r)!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=r} B_{\alpha,\beta,\gamma}^r(d) B_{i-\alpha,j-\beta,k-\gamma}^{q-r}(z), \quad i+j+k=q.$$

Damit lässt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen eines Polynoms und den Koeffizienten seiner Bézier-Bernstein-Darstellung herleiten (vgl. Farin [67], Nürnberger und Zeilfelder [112]). Sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ ,  $d_i$  für  $i = 1, 2$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_1, v_{i+1}]$  und  $p \in \mathcal{P}_q$  definiert durch

$$p(z) = \sum_{i+j+k=q} a_{i,j,k} \cdot B_{i,j,k}^q(z), \quad z \in T.$$

**Lemma 2.12:**

Für  $\alpha + \beta \leq q$  gilt

$$p_{d_1^\alpha d_2^\beta}(v_1) = \frac{q!}{(q-\alpha-\beta)!} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} (\phi_1)_{d_1}^{\alpha-j} (\phi_1)_{d_2}^{\beta-k} (\phi_2)_{d_1}^j (\phi_3)_{d_2}^k \cdot a_{q-j-k,j,k}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} a_{q-\alpha-\beta,\alpha,\beta} &= \frac{(q-\alpha-\beta)!}{q! (\phi_2)_{d_1}^\alpha (\phi_3)_{d_2}^\beta} p_{d_1^\alpha d_2^\beta}(v_1) - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{j} \left( \frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \cdot a_{q-j-\beta,j,\beta} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \left( \frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left( \frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \cdot a_{q-j-k,j,k}. \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Formeln können die partiellen Ableitungen  $p_{d_1^j d_2^k}(v_1)$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ , in eindeutiger Weise aus den Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $a_{q-j-k,j,k}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ , und umgekehrt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $a_{q-j-k,j,k}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ , in eindeutiger Weise aus den partiellen Ableitungen  $p_{d_1^j d_2^k}(v_1)$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ , berechnet werden.

## 2.4 Approximationsordnung und schwache Interpolation

Bei der Interpolation einer gegebenen Funktion  $f \in C^{q+1}(\Omega)$  ist es wichtig, dass der Interpolant  $s \in \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$  die Funktion  $f$  nicht nur in den Interpolationspunkten sondern auf dem ganzen Gebiet  $\Omega$  gut darstellt, d.h. die maximale Abweichung

$$\|f - s\| := \max_{z \in \Omega} |(f - s)(z)|$$

möglichst schnell gegen Null geht, wenn  $\Delta$  geeignet verfeinert wird und damit die Anzahl der Interpolationspunkte steigt. Dies wird durch die sogenannte Approximationsordnung beschrieben.

**Definition 2.13:**

Sei  $f \in C^{q+1}(\Omega)$ ,  $h = |\Delta|$  und  $\alpha$  der kleinste Winkel der Triangulierung  $\Delta$ . Dann heißt die größte Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , für die es eine nur von  $f$  und  $\alpha$ , nicht aber von  $h$  abhängige Konstante  $K > 0$  gibt, so dass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)) := \inf\{\|f - s\| : s \in \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)\} \leq K \cdot h^k,$$

die APPROXIMATIONSORDNUNG von  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ .

Nach Ciarlet und Raviart [37] ist bekannt, dass  $k \leq q + 1$ . Die Approximationsordnung heißt OPTIMAL, falls  $k = q + 1$ . Untersuchungen von de Boor und Jia [25] zeigen, dass nicht jede Interpolationsmethode dies erreicht. Wesentliche Faktoren dafür sind Polynomgrad und Differenzierbarkeitsordnung der Splines, die Geometrie der Triangulierung und die Lokalität der Interpolation (siehe de Boor und Höllig [21,23] und Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [51,56]). Ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung der Approximationsordnung von Interpolationsmethoden ist die schwache Interpolation. Sie wurde von Nürnberger [107], Nürnberger und Walz [110], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] und Nürnberger und Zeilfelder [118] entwickelt. Die Theorie beruht auf der Beobachtung, dass der interpolierende Spline  $s$  Bedingungen erfüllt, die man als "schwächer" bezeichnen kann als Interpolationsbedingungen. Grob gesprochen bedeutet dies, dass wenn auf einem Dreieck  $T \in \Delta$  geeignete Punkte  $z_1, \dots, z_m$ , ( $m = \dim(\mathcal{P}_q)$ ), existieren, für die

$$|(f - s|_T)(z_i)| \leq K \cdot h^k, \quad i = 1, \dots, m,$$

gilt, dass dann

$$\|f - s|_T\| \leq K \cdot h^k.$$

Wir stellen nun einige der von Nürnberger und Zeilfelder [118] bewiesenen Aussagen vor.

Seien  $T$  ein Dreieck mit längster Seite  $h$  und  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m = \dim(\mathcal{P}_q)$ , (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf  $T$ . Für  $l = 1, \dots, m$  definieren wir linear unabhängige Einheitsvektoren  $d_{1,l}$ ,  $d_{2,l}$  sowie  $i_l, j_l \in \mathbb{N}_0$  und setzen  $k_l = i_l + j_l$ . Des Weiteren sei  $p \in \mathcal{P}_q$  für eine genügend oft differenzierbare Funktion  $f$  die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l) = f_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, m.$$

**Lemma 2.14:**

Sei  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und  $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$ , wobei  $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$ . Erfüllt  $p \in \mathcal{P}_q$  die Bedingungen

$$|(f - p)_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l)| \leq C \cdot h^{\sigma - k_l}, \quad l = 1, \dots, m,$$

für eine (nur von  $q, f$  und dem kleinsten Innenwinkel von  $T$  abhängige) Konstante  $C > 0$ , so gibt es eine Konstante  $K > 0$  (nur abhängig von  $q, f$  und dem kleinsten Innenwinkel von  $T$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$  gilt:

$$\|D^w(f - p)\| := \max_{i+j=w} \|(f - p)_{d_1^i d_2^j}\| \leq K \cdot h^{\sigma-w}.$$

Nürnberg und Zeilfelder [118] zeigten, dass sich diese Aussage auch auf die univariate Interpolation übertragen lässt. Seien  $e$  eine Kante der Länge  $h$ ,  $d$  ein Einheitsvektor entlang  $e$  und  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, q + 1$ , (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf  $e$ . Ferner sei  $k_l \in \mathbb{N}_0$ ,  $l = 1, \dots, q + 1$ , und  $p \in \Pi_q$  die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d^{k_l}}(z_l) = f_{d^{k_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, q + 1.$$

**Lemma 2.15:**

Sei  $f : e \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und  $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$ , wobei  $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$ . Erfüllt ein univariates Polynom  $p \in \Pi_q$  die Bedingungen

$$|(f - p)_{d^{k_l}}(z_l)| \leq C \cdot h^{\sigma-k_l}, \quad l = 1, \dots, q + 1,$$

für eine (nur von  $q$  und  $f$  abhängige) Konstante  $C > 0$ , so gibt es eine Konstante  $K > 0$  (nur abhängig von  $q$  und  $f$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$  gilt:

$$\|(f - p)_{d^w}\| \leq K \cdot h^{\sigma-w}.$$





## Kapitel 3:

# Lagrange-Interpolation mit quartischen $C^1$ -Splines auf Triangulierungen

In diesem Kapitel betrachten wir den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ . In der derzeitigen Literatur über bivariate Splines existiert kein Algorithmus zur Konstruktion von Lagrange- oder Hermite-Interpolationsmengen für quartische  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen ohne Unterteilung von Dreiecken. Zwar bestimmten Alfeld, Piper und Schumaker [3] die Dimension des Splineraums  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  für beliebige  $\Delta$ , jedoch lassen sich aus ihren nicht-lokalen Argumenten der Graphentheorie i.A. keine Interpolationsmengen ableiten. Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta)) = 6\#V(\Delta) + \sigma(\Delta) - 3 = lb_4^1(\Delta).$$

Lediglich für allgemeine Klassen von Triangulierungen gibt es Verfahren zur Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines. So entwickelte beispielsweise Gao [70] eine Methode zur Hermite-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad 4 auf Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt. Davydov und Nürnberger [54] konstruierten für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 4$ , induktiv Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ , bei denen in selten auftretenden Ausnahmefällen die Triangulierung leicht modifiziert wird. Für die regelmäßigen Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  (vgl. Abbildungen 9 und 14) gaben Nürnberger und Riessinger [105] Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für  $C^r$ -Splines beliebigen Grades  $q \geq r \geq 1$  an. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [52, 53, 55] betrachteten Nested-Polygon-Triangulierungen, d.h. Triangulierungen ineinander geschachtelter, geschlossener Polygonzüge (vgl. Abbildung 3) und entwickelten ein Verfahren zur Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 3$ . Außerdem konstruierten Nürnberger und Zeilfelder [112] Interpolationsmengen für  $C^1$ -Splines beliebigen Grades für eine Klasse von induktiv konstruierten Triangulierungen. Darüber hinaus existieren zahlreiche Methoden zur Lagrange- und Hermite-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 3$  auf beliebigen Triangulierungen, die durch Unterteilungen geeignet verfeinert werden (siehe Nürnberger und Zeilfelder [115, 117, 118], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [52], Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [114, 116]).

Wir entwickeln in diesem Kapitel einen Algorithmus zur Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen für quartische  $C^1$ -Splines auf allgemeinen Klassen natürlicher Triangulierungen  $\Delta$ , wobei keine Dreiecke unterteilt werden. Zu solchen Triangulierungen gehören beispielsweise die Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  (vgl. Abbildung 9), separable Triangulierungen (vgl. Beispiele 3.2) sowie viele andere Partitionen. Diese Klasse ist dadurch charakterisiert, dass eine geeignete Teilmenge  $\Delta_s \subset \Delta$  existiert, so dass jeder innere Knoten geraden Grades von  $\Delta$  entweder Eckpunkt genau eines Dreiecks in  $\Delta_s$  oder zweier benachbarter Dreiecke in  $\Delta_s$  ist. In Abschnitt 3.1 bestimmen wir zunächst  $\Delta_s$  und legen dann

algorithmisch unter Verwendung einer Verallgemeinerung der Methode von Alfeld, Piper und Schumaker [3] geeignete Pfade für die Knoten der Triangulierung fest. Diese Pfade verbinden jeden Eckpunkt der Dreiecke in  $\Delta_s$  mit einem Randknoten, singulären Knoten oder Knoten ungeraden Grades von  $\Delta$  über eine Kette von nichtzyklischen, im Anfangspunkt nichtdegenerierten Kanten der Triangulierung (vgl. Abbildungen 14 und 15). Durch die Pfade wird insbesondere eine Reihenfolge der Knoten von  $\Delta$  definiert. Unter Verwendung von  $\Delta_s$ , dieser Reihenfolge und der Pfade durchlaufen wir in Abschnitt 3.2 die Knoten der Triangulierung und wählen geeignete Punkte zur eindeutigen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ .

### 3.1 Beschreibung der Klasse $\mathcal{T}$

Im Folgenden definieren wir eine allgemeine Klasse  $\mathcal{T}$  natürlicher Triangulierungen, welche für diese Lagrange-Interpolationsmethode mit quartischen  $C^1$ -Splines geeignet sind. Für solche Triangulierungen  $\Delta$  legen wir die charakterisierende Teilmenge  $\Delta_s \subset \Delta$  fest und wählen anschließend algorithmisch geeignete Pfade für die Eckpunkte der Dreiecke in  $\Delta_s$ .

**Definition 3.1:**

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung. Gibt es eine Teilmenge  $\Delta_s \subset \Delta$ , so dass für jeden Knoten  $v \in V_I(\Delta)$  geraden Grades entweder

- 1.) genau ein Dreieck mit Eckpunkt  $v$  in  $\Delta_s$  liegt oder
- 2.) genau zwei benachbarte Dreiecke mit Eckpunkt  $v$  in  $\Delta_s$  liegen,

so gehört  $\Delta$  zur Klasse  $\mathcal{T}$ , d.h.  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Andernfalls gehört  $\Delta$  nicht zur Klasse  $\mathcal{T}$ . Die Menge  $\Delta_s$  bezeichnen wir als FÄRBUNG von  $\Delta$ .

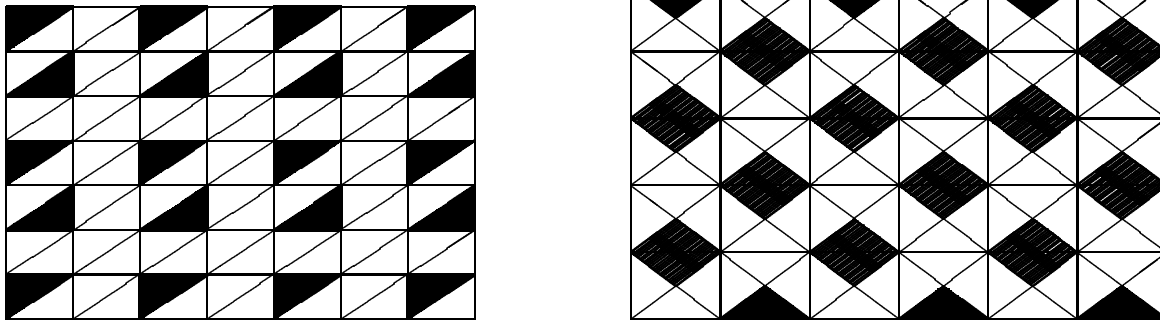


Abb. 9: Mögliche Färbungen der Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ .

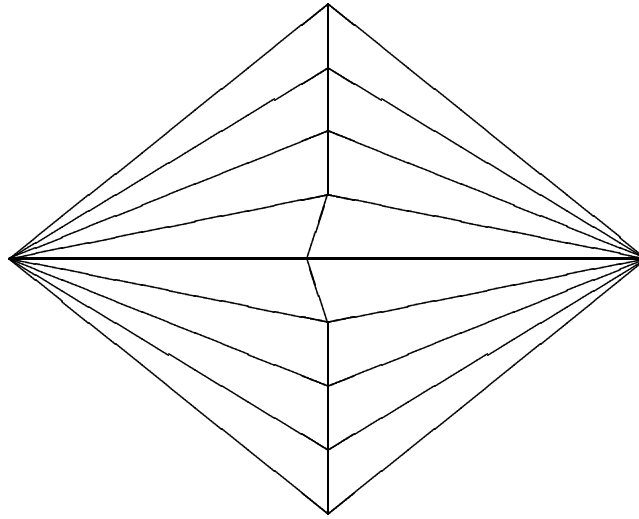


Abb. 10: Gegenbeispiel.

**Beispiele 3.2:**

- Die regelmäßigen Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  repräsentieren den Fall, in dem alle inneren Knoten einen geraden Grad besitzen und somit berücksichtigt werden müssen. Eine mögliche Färbung dieser Triangulierungen zeigt Abbildung 9.
- Abbildung 10 zeigt eine Triangulierung, die nicht in  $\mathcal{T}$  liegt. Hier ist es nicht möglich, mehr als zwei mal zwei benachbarte Dreiecke für  $\Delta_s$  zu wählen. Daher ist für mindestens einen inneren Knoten geraden Grades kein Dreieck seiner Zelle in  $\Delta_s$  enthalten.
- Abbildung 15 zeigt eine exemplarische Triangulierung. In diesem Beispiel können geeignete Dreiecke für  $\Delta_s$  disjunkt gewählt werden. Es ist nicht notwendig, zwei benachbarte Dreiecke zu färben.
- Jede separable Triangulierung liegt in  $\mathcal{T}$ . Eine Triangulierung  $\Delta$  heißt SEPARABEL, wenn es eine Teilmenge  $\Delta_0 \subset \Delta$  gibt, so dass jeder Knoten von  $\Delta$  Eckpunkt genau eines Dreiecks in  $\Delta_0$  ist (vgl. Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [116]).

Seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, u)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, w)$  zwei benachbarte Dreiecke in  $\Delta_s$ . Ist  $v_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , ein innerer, nichtsingulärer Knoten, für den keine nicht auf  $T_1 \cup T_2$  liegende Kante mit Endpunkt  $v_i$  existiert, die in  $v_i$  nichtdegeneriert ist, so definieren wir  $v_i$  als NICHT NORMAL (vgl. Abbildung 11). Andernfalls bezeichnen wir  $v_i$  als NORMAL.

Für die Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{T}$ , konstruieren wir nun algorithmisch eine Menge von Pfaden. Diese Pfade sind aufeinanderfolgende, im Anfangspunkt nichtdegenerierte Kanten, die nicht-zyklisch verlaufen. Sie verbinden jeden inneren, nichtsingulären, normalen Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$  mit einem Randknoten, singulären Knoten oder

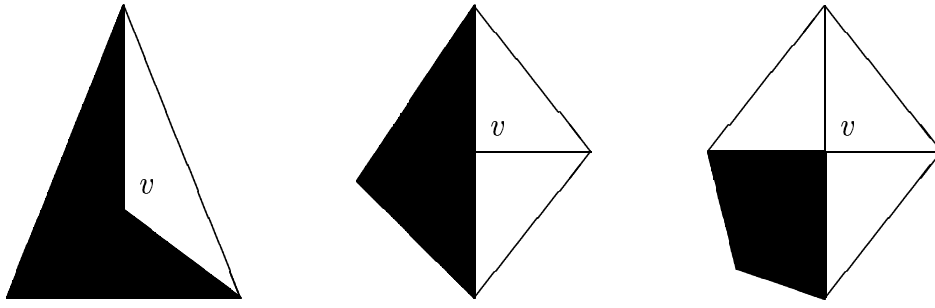


Abb. 11: Konstellationen mit nicht normalem Knoten  $v$ .

Knoten ungeraden Grades, der nicht Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$  ist (vgl. Abbildung 14 und 15, siehe auch Alfeld, Piper und Schumaker [3]).

Sei  $V_{in} \subset V(\Delta)$  die Menge aller inneren, nichtsingulären, normalen Knoten von  $\Delta$ , die Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$  sind und  $V_{ok} = V(\Delta) \setminus V_{in}$ . Es gelte  $n := \#V_{in}$ .

**Algorithmus 3.3:**

*Für  $j = n, \dots, 1$  wähle einen noch nicht gewählten Knoten  $v_j \in V_{in}$ , für den eine in  $v_j$  nichtdegenerierte Kante  $a$  existiert, die nicht auf einem Dreieck in  $\Delta_s$  liegt, und die  $v_j$  mit einem Knoten in  $V_{ok}$  verbindet. Markiere  $a$  als Pfad von  $v_j$  und setze  $V_{ok} = V_{ok} \cup \{v_j\}$ .*

Da alle einzelnen Dreiecke und Paare von Dreiecken in  $\Delta_s$  disjunkt liegen, also keine gemeinsamen Eckpunkte besitzen, gibt es i.A. in jedem Schritt eine Möglichkeit zur Festlegung einer nichtdegenerierten Kante als Pfad. Es existieren jedoch Ausnahmesituationen, in denen bei sehr speziellen Konstellationen von Kanten und Knoten keine geeigneten Pfade markiert werden können. Abbildung 12 zeigt Beispiele solcher Konstellationen. In diesen Fällen sind für die drei inneren Knoten, die Eckpunkte von Dreiecken in  $\Delta_s$  sind, jeweils zwei Kanten in diesen Knoten degeneriert. Daher können hier Pfade nur zyklisch, nicht aber zu einem Knoten in  $V_{ok}$  gewählt werden. Um solche Ausnahmefälle zu vermeiden, fordern wir als zusätzliche Bedingung an die Triangulierungen  $\Delta \in \mathcal{T}$ , dass jedes Dreieck  $T \in \Delta$  mindestens einen Eckpunkt  $v$  besitzt, für den weniger als zwei in  $v$  degenerierte Kanten existieren.

Nun ordnen wir die Knoten  $V(\Delta) = \{v_1, \dots, v_d\}$  der Triangulierung wie folgt an:

- $v_1, \dots, v_n$ , die Knoten in  $V_{in}$ , deren Reihenfolge durch Algorithmus 3.3 festgelegt ist,
- $v_{n+1}, \dots, v_m$ , in beliebiger Reihenfolge die verbleibenden Eckpunkte der Dreiecke in  $\Delta_s$ ,
- $v_{m+1}, \dots, v_t$ , in beliebiger Reihenfolge die inneren Knoten, die nicht Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$  sind (diese besitzen ungeraden Grad) und
- $v_{t+1}, \dots, v_d$ , im Uhrzeigersinn die verbleibenden Randknoten von  $\Delta$  (diese sind nicht Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$ ). Dabei ist  $v_{t+1}$ , falls möglich, ein benachbarter Knoten eines Randknotens  $v_{n+1}, \dots, v_m$ .

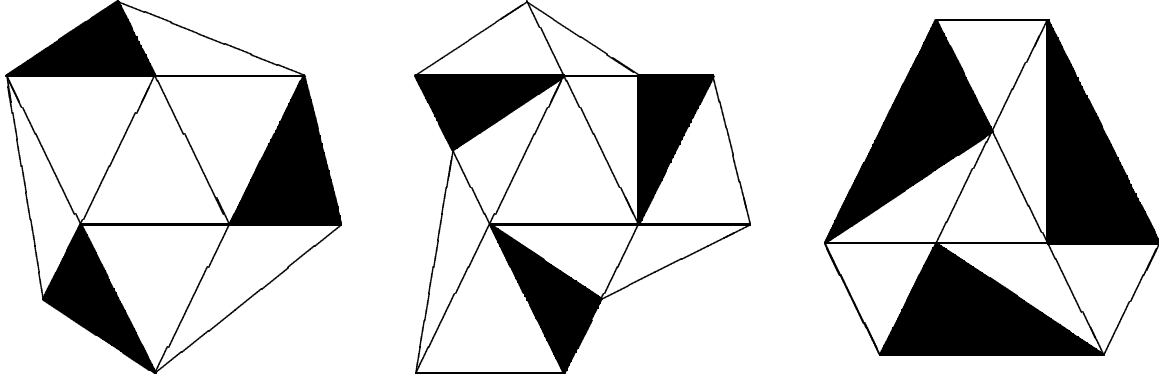


Abb. 12: Konstellationen ohne Möglichkeit für Pfade.

### 3.2 Lagrange-Interpolation

Unter Verwendung der in Abschnitt 3.1 definierten Pfade, der festgelegten Reihenfolge der Knoten der Triangulierung sowie der Teilmenge  $\Delta_s \subset \Delta$  konstruieren wir nun Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{T}$ .

Sei die Triangulierung  $\Delta \in \mathcal{T}$  o.B.d.A. ohne Randdreiecke gegeben (sonst konstruieren wir zunächst Lagrange-Interpolationsmengen auf  $\Delta$  ohne den Randdreiecken und wählen anschließend in jedem dieser Randdreiecke genau sechs zusätzliche Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_2$  (siehe \* in Abbildung 14, vgl. Nürnberger und Zeilfelder [112])). Ein Dreieck  $T = \Delta(u, v, w) \in \Delta$  heißt **RANDDREIECK** der Triangulierung, falls  $u, v, w \in V_B(\Delta)$ .

Für einen Knoten  $v_i \in V(\Delta)$  mit  $\text{Grad}(v_i) = n_i$  sei  $v_i$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , durch Kanten  $e_{i,j} = [v_i, v_{i,j}]$ . Ferner sei  $d_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , ein Einheitsvektor entlang  $e_{i,j}$  und  $\Delta_{v_i} = \{T_{i,j} = \Delta(v_i, v_{i,j}, v_{i,j+1}), j = 1, \dots, n_i\}$ ,  $v_{i,n_i+1} = v_{i,1}$ , die Zelle um  $v_i$ . Für einen Randknoten ent falle das Dreieck  $T_{i,n_i}$ . Falls vorhanden, sei  $e_{i,r_i}$ ,  $r_i \in \{1, \dots, n_i\}$ , der Pfad von  $v_i$ . Dann wählen wir folgende Interpolationspunkte:

- $\mathcal{L}_1$ : 15 Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_4$ , auf jedem einzelnen Dreieck in  $\Delta_s$ ;
- $\mathcal{L}_2$ : für zwei benachbarte Dreiecke  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ ,  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4) \in \Delta_s$  genau 15 Punkte analog  $\mathcal{L}_1$  auf  $T_1$ ,  $v_4$ , je einen Punkt im Innern von  $[v_1, v_4]$ ,  $[v_2, v_4]$  und  $T_2$ , sowie, falls  $v_1$  bzw.  $v_2$  normal ist, einen Punkt im Innern von  $[v_1, v_4]$  bzw.  $[v_2, v_4]$ ;
- $\mathcal{L}_3$ : genau einen Punkt im Innern jeder Kante von  $\Delta$ , die nicht auf einem Dreieck in  $\Delta_s$  liegt und die kein Pfad ist;
- $\mathcal{L}_4$ :  $v_i$  und je einen Punkt im Innern zweier nicht kollinear Kanten  $e_{i,j_1}$ ,  $e_{i,j_2}$ . Dabei sind  $v_{i,j_1}$  und  $v_{i,j_2}$  die zwei benachbarten Knoten von  $v_i$  mit den niedrigst möglichen Indizes in  $V(\Delta) = \{v_1, \dots, v_d\}$ , für jeden Knoten  $v_i$ ,  $i = m + 1, \dots, d$ , (siehe  $\blacktriangle$  in Abbildungen 14 und 15);

$\mathcal{L}_5$ : einen Punkt im Innern von  $T = \Delta(v_i, w_{i,1}, w_{i,2}) \in \Delta$  für  $i = t+1, \dots, d$ , wobei  $w_{i,1} \in V_I(\Delta)$  und  $w_{i,2} \in V_B(\Delta)$  der im Gegenuhrzeigersinn benachbarte Randknoten von  $v_i$  ist (siehe  $\star$  in Abbildungen 14 und 15). Gilt  $V_B(\Delta) \cap V(\Delta_s) = \emptyset$ , d.h. ist kein Randpunkt Eckpunkt eines Dreiecks in  $\Delta_s$ , so sind die beiden Punkte für  $v_{t+1}$  und  $v_{t+2}$  im Innern des Dreiecks  $\Delta(v_{t+1}, v_{t+2}, w_{i,1})$  zu wählen.

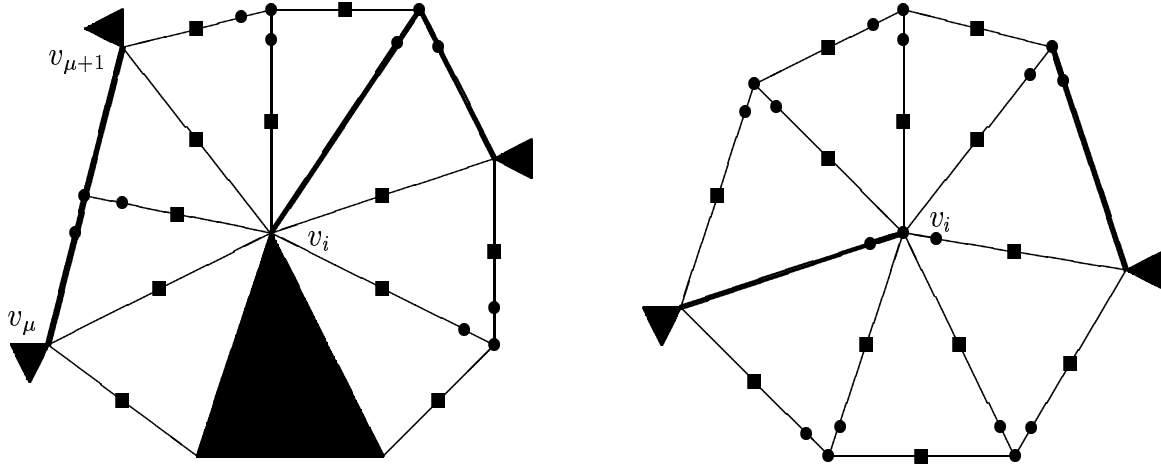


Abb. 13: Lagrangepunkte in  $\mathcal{L}_3$ :  $\blacksquare$  und  $\mathcal{L}_4$ :  $\bullet$  für eine Zelle.

**Theorem 3.4:**

Sei  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Dann ist

$$\mathcal{L} := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$$

eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$ .

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass  $\#\mathcal{L} = \dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta))$ . In  $\mathcal{L}$  enthalten sind

- drei Punkte für jeden Knoten  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4)$ ,
- ein Punkt auf jeder Kante, die kein Pfad ist, sowie genau ein zusätzlicher Punkt auf einem Dreieck in  $\Delta_s$ , für jede Kante, die ein Pfad ist  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ ,
- ein Punkt für jeden Randknoten  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_5)$ , und
- ein Punkt für jeden inneren, singulären Knoten  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ .

Also gilt

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L} &= 3\#V(\Delta) + \#E(\Delta) + \#V_B(\Delta) + \sigma(\Delta) \\ &= 6\#V(\Delta) + \sigma(\Delta) - 3 \\ &= \dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta)). \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei  $s \in \mathcal{S}_4^1(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T = p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$  für alle  $T \in \Delta$ , und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}$ . In jedem einzelnen Dreieck  $T \in \Delta_s$  folgt aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_1$  auf  $T$ , dass  $p^{[T]} \equiv 0$ , da  $p^{[T]}$  eindeutige Lösung des homogenen Interpolationsproblems auf  $T$  ist. Seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$  zwei benachbarte Dreiecke in  $\Delta_s$ , dann folgt aus den Punkten in  $\mathcal{L}_2$  auf  $T_1$  mit analogem Argument  $p^{[T_1]} \equiv 0$ . Sind  $v_1$  und  $v_2$  normal, so implizieren die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_2$  auf den Kanten von  $T_2$  und die  $C^1$ -Stetigkeit über der Kante  $[v_1, v_2]$  die Existenz eines Polynoms  $q^{[T_2]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_2]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_2]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q^{[T_2]}(z), \quad z \in T_2.$$

Dabei ist  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_1, v_2]$ , und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$ ,  $j = 2, 3$ , sind Geraden durch die anderen beiden Kanten von  $T_2$ . Wegen des Interpolationspunkts in  $\mathcal{L}_2$  im Innern von  $T_2$  gilt  $q^{[T_2]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_2]} \equiv 0$ . Sei jetzt o.B.d.A.  $v_1$  nicht normal,  $v_2$  normal (die beiden anderen Fälle,  $v_1$  normal,  $v_2$  nicht normal und  $v_1, v_2$  nicht normal, werden analog bewiesen). Wir definieren  $e_i := [v_1, v_i]$ ,  $i = 2, \dots, 4$ , und setzen  $d_i$ ,  $i = 2, \dots, 4$ , einen Einheitsvektor entlang  $e_i$ . Aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten mit Endpunkt  $v_1$  folgt  $p_{d_2d_4}^{[T_2]}(v_1) = p_{d_4d}^{[T_2]}(v_1) = 0$ . Dabei ist  $d$  ein Einheitsvektor entlang der benachbarten Kante  $e$  von  $e_4$  im Endpunkt  $v_1$ . (Für  $\text{Grad}(v_1) = 3$  ist  $e = e_3$ , für  $\text{Grad}(v_1) \in \{4, 5\}$  ist  $e$  eine in  $v_1$  degenerierte Kante (vgl. Abbildung 11).) Die  $C^1$ -Stetigkeit über der Kante  $e_4$  impliziert  $p_{d_4}^{[T_2]}(v_1) = 0$ . Mit analoger Argumentation wie für  $v_1, v_2$  normal ergibt sich  $p^{[T_2]} \equiv 0$ .

Wir betrachten nun die Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , in der festgelegten Reihenfolge und zeigen  $D^w p^{[T]}(v_i) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v_i$ . Sei für  $v_1, \dots, v_{i-1}$  die Aussage bereits bewiesen, dann betrachten wir die Zelle  $\Delta_{v_i}$ . Sei dazu  $v_i$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , durch Kanten  $e_{i,j} = [v_i, v_{i,j}]$ ,  $d_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , ein Einheitsvektor entlang  $e_{i,j}$  und  $T_{i,j} = \Delta(v_i, v_{i,j}, v_{i,j+1})$ ,  $v_{i,n_i+1} = v_{i,1}$ . Falls  $v_i$  ein Randknoten ist, entfalle das Dreieck  $T_{i,n_i}$ . Liegt  $v_{i,j}$  in  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ , so gilt  $D^w p^{[T]}(v_{i,j}) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v_{i,j}$ , da  $v_{i,j}$  bereits betrachtet wurde. Andernfalls gilt entweder  $v_{i,j} \in V(\Delta_s)$  oder auf  $e_{i,j}$  liegen zwei Interpolationspunkte von  $\mathcal{L}_4$  oder es gibt zwei benachbarte Knoten  $v_{k,j_1}$  und  $v_{k,j_2}$  von  $v_{i,j} = v_k$ , die in  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  liegen (diese besitzen einen niedrigeren Index und wurden daher bereits behandelt). Im letzten Fall implizieren die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_3$  und  $\mathcal{L}_4$ , dass  $s|_{e_{k,j_1}} \equiv s|_{e_{k,j_2}} \equiv 0$ , und mit der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_{i,j}$  schließlich  $D^w p^{[T]}(v_{i,j}) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ , für alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v_{i,j}$ . Mit dem Interpolationspunkt in  $\mathcal{L}_3$  und der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_{i,j}$  gibt es somit in allen drei Fällen drei homogene Interpolationsbedingungen auf jeder Kante  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , die nicht der Pfad  $r_i$  von  $v_i$  ist. Für den  $C^2$ -Ring von  $v_i$  unterscheiden wir sechs Fälle. Es gelte jeweils o.B.d.A.  $T_{i,1} \in \Delta_s$  bzw.  $T_{i,1}, T_{i,2} \in \Delta_s$ , falls  $v_i \in V(\Delta_s)$ .

**Fall 1:**  $v_i \in V(\Delta_s) \cap V_I(\Delta)$  ist normal;

Sei  $e_{i,r}$ ,  $r \in \{3, \dots, n_i\}$ , der Pfad von  $v_i$ .  $p^{[T_{i,1}]} \equiv 0$ , die  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_i$  und die jeweils drei homogenen Interpolationsbedingungen auf  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $j \neq r$ , implizieren  $s|_{e_{i,j}} \equiv 0$  und damit insbesondere  $p_{d_{i,j}}^{[T_{i,j}]} = 0$  für  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $j \neq r$ . Wegen  $p^{[T_{i,1}]} \equiv 0$  gilt  $p_{d_{i,1}d_{i,2}}^{[T_{i,1}]}(v_i) = 0$  und aus der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , folgt  $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_{i,j}]}(v_i) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Da  $e_{i,r}$

in  $v_i$  nichtdegeneriert ist, impliziert die  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,r}$ , dass  $p_{d_{i,r}^2}^{[T_i,r]} = 0$  und somit

$$D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 2:**  $v_i \in V(\Delta_s) \cap V_I(\Delta)$  ist nicht normal;

Analog Fall 1 gilt  $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , also insbesondere  $p_{d_{i,j}^2}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Ferner impliziert  $p^{[T_i,1]} \equiv p^{[T_i,2]} \equiv 0$ , dass  $p_{d_{i,1}d_{i,2}}^{[T_i,1]}(v_i) = p_{d_{i,2}d_{i,3}}^{[T_i,2]}(v_i) = 0$ . Mit der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , folgt  $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 3, \dots, n_i$ , also insgesamt

$$D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 3:**  $v_i$  ist singulär;

Analog Fall 1 gilt  $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , also insbesondere  $p_{d_{i,j}^2}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Wegen  $p^{[T_i,1]} \equiv 0$  gilt  $p_{d_{i,1}d_{i,2}}^{[T_i,1]}(v_i) = 0$  und mit der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , schließlich  $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 2, \dots, 4$ . Daraus ergibt sich

$$D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 4:**  $v_i \in V_I(\Delta) \setminus V(\Delta_s)$ ;

Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_4$  auf  $e_{i,j_1}$  und  $e_{i,j_2}$  sowie die jeweils drei homogenen Bedingungen auf diesen Kanten implizieren  $s_{|e_{i,j_1}} \equiv s_{|e_{i,j_2}} \equiv 0$ . Mit der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_i$  folgt  $D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $w = 0, 1$ . Aus den jeweils drei homogenen Bedingungen auf  $E_I(\Delta_{v_i}) \setminus \{e_{i,j_1}, e_{i,j_2}\}$  ergibt sich  $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , also insbesondere  $p_{d_{i,j}^2}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Da  $\text{Grad}(v_i)$  ungerade ist, folgt aus der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , nach Lemma 2.5, dass  $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Somit gilt

$$D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 5:**  $v_i \in V_B(\Delta) \cap V(\Delta_s)$ ;

Analog Fall 1 implizieren die  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_i$  und die jeweils drei homogenen Bedingungen auf  $e_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , dass  $s_{|e_{i,j}} \equiv 0$  und damit insbesondere  $p_{d_{i,j}^2}^{[T_i,j]} = 0$  für  $j = 1, \dots, n_i$ . Aus  $p^{[T_i,1]} \equiv 0$  folgt  $p_{d_{i,1}d_{i,2}}^{[T_i,1]}(v_i) = 0$  und mit der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_{i,j}$ ,  $j = 2, \dots, n_i - 1$ , schließlich  $p_{d_{i,j}d_{i,j+1}}^{[T_i,j]}(v_i) = 0$ ,  $j = 2, \dots, n_i - 1$ . Also gilt

$$D^w p^{[T_i,j]}(v_i) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n_i - 1, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 6:**  $v_i \in V_B(\Delta) \setminus V(\Delta_s)$ ;

Gilt  $V_B(\Delta) \cap V(\Delta_s) = \emptyset$ , so liegen auf dem Dreieck  $T = \Delta(v_{t+1}, v_{t+2}, v) \in \Delta$  zwei Punkte  $z_1, z_2 \in \mathcal{L}_5$ . Analog Fall 4 ergibt sich  $D^w p^{[T]}(v_{t+1}) \equiv D^w p^{[T]}(v_{t+2}) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ . Außerdem



gilt  $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , da  $v \in V_I(\Delta)$  in  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  liegt. Somit existiert ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot q(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , Geraden durch die Kanten von  $T$  sind, und  $g_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_4(x, y) = a_4 x + b_4 y + c_4 = 0\}$  eine Gerade durch  $[z_1, z_2]$  ist. Aus  $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , folgt  $q^{[T]}(v) = 0$  und damit  $q^{[T]} \equiv p^{[T]} \equiv 0$ .

Gilt  $V_B(\Delta) \cap V(\Delta_s) \neq \emptyset$ , so liegt ein Punkt von  $\mathcal{L}_5$  auf  $T = \Delta(v_i, w_{i,1}, w_{i,2})$  und aus  $w_{i,1}, w_{i,2} \in \{v_i, \dots, v_{i-1}\}$  folgt  $D^w p^{[T]}(w_{i,j}) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,  $j = 1, 2$ . Analog Fall 4 gilt  $D^w p^{[T]}(v_i) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ . Daher gibt es ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[w_{i,1}, w_{i,2}]$  ist, und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$ ,  $j = 2, 3$ , Geraden durch die anderen beiden Kanten von  $T$  sind. Der Interpolationspunkt in  $\mathcal{L}_5$  im Innern von  $T$  impliziert dann  $q^{[T]} \equiv 0$ , also ebenfalls  $p^{[T]} \equiv 0$ .

Der Rest des Beweises von Fall 6 verläuft analog zum Beweis von Fall 5.

Für jeden Knoten  $v \in V(\Delta)$  gilt damit  $D^w p^{[T]}(v) = 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für jedes Dreieck  $T$  mit Eckpunkt  $v$ . Dies impliziert  $s \equiv 0$ .

#

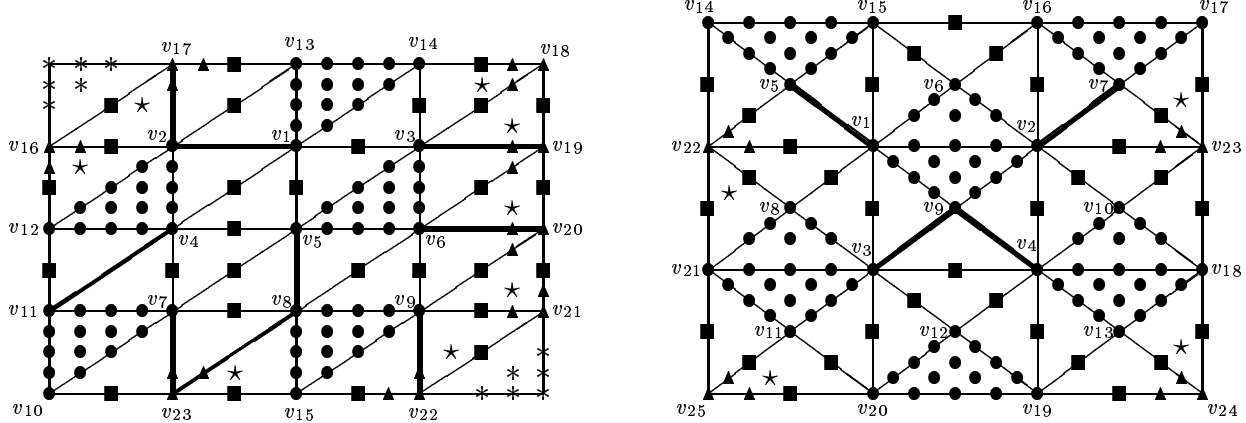


Abb. 14: Lagrange-Interpolationsmenge  $\mathcal{S}_4^1(\Delta^1)$  bzw.  $\mathcal{S}_4^1(\Delta^2)$ .

### Beispiele 3.5:

- Abbildung 14 zeigt eine Lagrange-Interpolationsmenge des Splineraums  $\mathcal{S}_4^1(\Delta^1)$  bzw.  $\mathcal{S}_4^1(\Delta^2)$ . Die Punkte von  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  und  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 3, \dots, 5$ , in dieser Reihenfolge mit  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$  und  $\star$  markiert. Die Interpolationspunkte auf den Randdreiecken von  $\Delta^1$  sind mit  $*$  markiert. Die dick gezeichneten Kanten entsprechen den Pfaden der Knoten in  $V_{in} = \{v_1, \dots, v_9\}$  (links) bzw.  $V_{in} = \{v_1, \dots, v_4\}$  (rechts).

- Abbildung 15 zeigt eine Lagrange-Interpolationsmenge des Splineraums  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  für eine exemplarische Triangulierung  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Die Punkte von  $\mathcal{L}_1$  und  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 3, \dots, 5$ , sind in dieser Reihenfolge mit  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$  und  $\star$  markiert. Die dick gezeichneten Kanten entsprechen den Pfaden der Knoten in  $V_{in} = \{v_1, \dots, v_{13}\}$ .

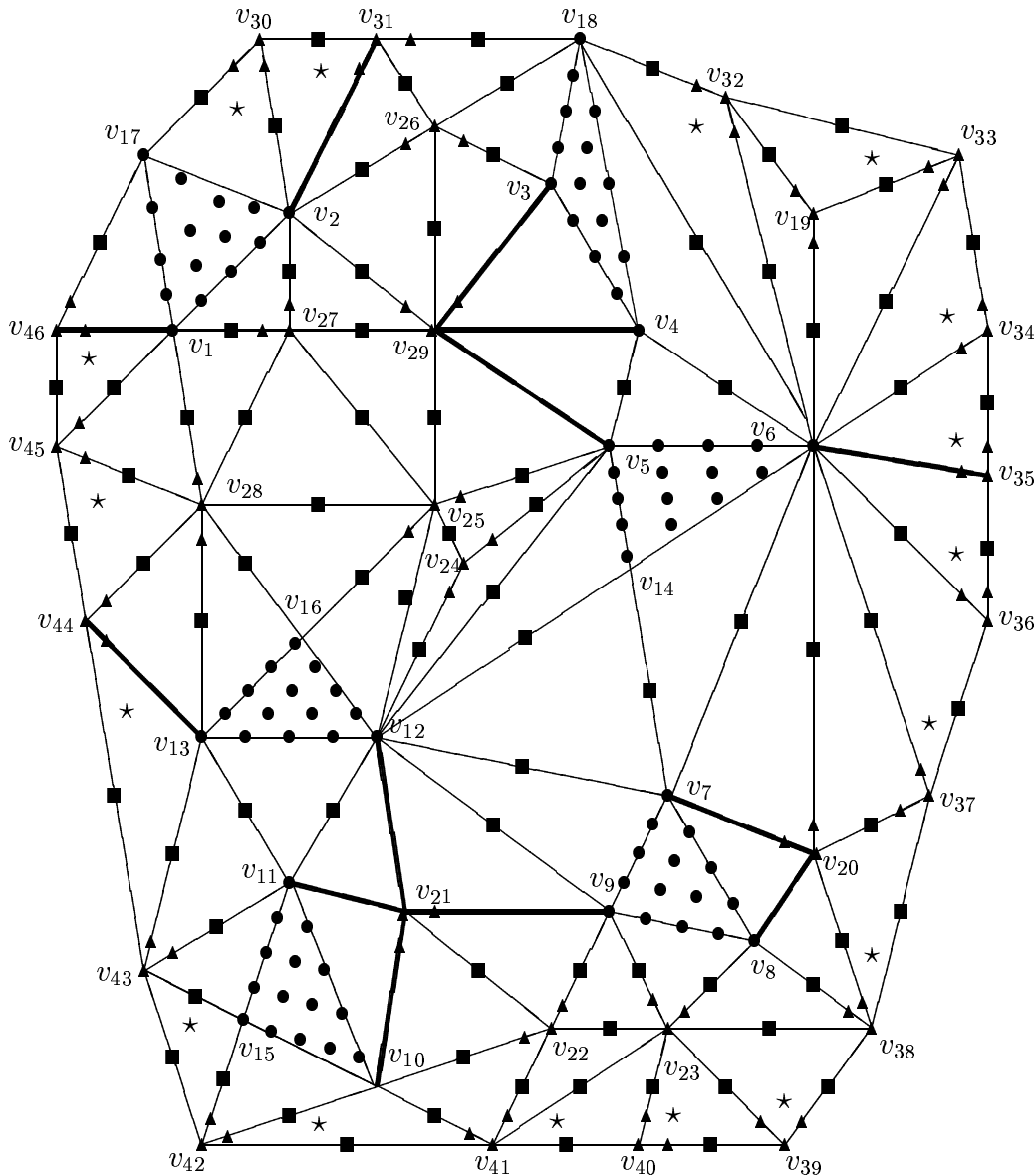


Abb. 15: Pfade und Interpolationspunkte für eine exemplarische Triangulierung.

## Kapitel 4:

# Lokale Lagrange-Interpolation mit quartischen $C^1$ -Splines

In diesem Kapitel befassen wir uns mit lokaler Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  und untersuchen die Approximationsgüte der Interpolation. De Boor und Jia [25] zeigten, dass bei der Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\leq 4$  auf beliebigen Triangulierungen ohne Verfeinerungen i.A. keine Lokalität der Interpolation und damit keine optimale Approximationsordnung zu erwarten ist (siehe auch de Boor und Höllig [21,23]). In der bivariaten Splineliteratur existieren zahlreiche Methoden zur nicht-lokalen Lagrange-Interpolation mit quartischen Splines auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen sowie auf beliebigen Triangulierungen, die geeignet verfeinert werden (siehe Davydov und Nürnberger [54], Nürnberger und Riessinger [105] und Nürnberger und Zeilfelder [112,113], vgl. Kapitel 3). Aufbauend auf den Ergebnissen von Alfeld, Piper und Schumaker [3] gaben Chui und Hong [35,36] zwei Algorithmen an, die auf beliebigen Triangulierungen mit geeigneten Clough-Tochter-Splits bzw. Diagonalenwechsel in konvexen Vierecken eine Lokalität der Quasi-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines ergeben. Lokale Lagrange-Interpolation wurde erst kürzlich von Nürnberger und Zeilfelder [118] untersucht, die auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  ein Verfahren zu solcher Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 3$  entwickelten, das optimale Approximationsordnung besitzt. Dabei werden etwa die Hälfte der Dreiecke von  $\Delta$  unterteilt. Wenig später konstruierte Kohlmüller [84] auf beliebigen Triangulierungen davon verschiedene Punktmengen zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 3$ . Diese alternative nicht-lokale Interpolationsmethode besitzt fast optimale Approximationsordnung, wobei i.A. nur etwa ein Viertel der Dreiecke von  $\Delta$  gesplittet werden.

Wir geben in diesem Kapitel das erste Verfahren zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\Delta)$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  an, das optimale Approximationsordnung besitzt und bei dem nur wenige Dreiecke von  $\Delta$  unterteilt werden. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 algorithmisch geeignete Dreiecke von  $\Delta$  mithilfe von Clough-Tochter-Splits verfeinert, so dass in der resultierenden Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  keine zwei benachbarten, inneren Knoten geraden Grad besitzen. Die Anzahl der Unterteilungen ist dabei deutlich geringer als bei dem von Nürnberger und Zeilfelder [118] entwickelten Verfahren. Unter Verwendung festgelegter Pfade und einer Modifikation des Kantenalgorithmus von Nürnberger und Zeilfelder [118] konstruieren wir in Abschnitt 4.2 Lagrange-Interpolationspunkte für  $C^1$ -Splines vom Grad 4 auf  $\tilde{\Delta}$ . Anschließend untersuchen wir die Träger der zur Interpolationsmenge gehörenden Fundamentalsplines und weisen so die Lokalität der Interpolation nach. Mithilfe der von Nürnberger [107] (siehe auch Nürnberger und Walz [110], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [51,56], Nürnberger und Zeilfelder [118]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation zeigen wir im letzten Abschnitt des Kapitels, dass diese Interpolationsmethode mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  optimale Approximationsordnung besitzt.

## 4.1 Verfeinerung von Triangulierungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Algorithmus zur Verfeinerung beliebiger Triangulierungen an. Hierbei unterteilen wir schrittweise geeignete Dreiecke durch Clough-Tochter-Splits, bis in der daraus resultierenden Triangulierung keine zwei benachbarten, inneren Knoten geraden Grad besitzen.

**Lemma 4.1:**

*Für jede Triangulierung  $\Delta$  gibt es eine aus  $\Delta$  durch Clough-Tochter-Splits resultierende Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ , in der keine zwei benachbarten, inneren Knoten geraden Grad besitzen.*

**Beweis:**

Sei  $\Delta$  beliebig gegeben, dann setzen wir  $V_g(\Delta) := \{v \in V_I(\Delta) \mid \text{Grad}(v) \in 2\mathbb{N}\}$  und  $k(\Delta) := \#V_g(\Delta)$ . Da  $\Delta$  nur endlich viele Knoten besitzt, gilt  $k(\Delta) < \infty$ . Sei  $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$  eine Kante, die zwei Knoten  $v_i, v_j \in V_g(\Delta)$  verbindet, dann unterteilen wir ein Dreieck  $T = \Delta(v_i, v_j, v_k) \in \Delta$ . Für die dadurch entstehende Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  gilt

$$k(\tilde{\Delta}) = k(\Delta) - \begin{cases} 1, & \text{falls } v_k \in V_I(\Delta) \text{ ungeraden Grad besitzt,} \\ 2, & \text{falls } v_k \text{ ein Randknoten ist,} \\ 3, & \text{falls } v_k \in V_I(\Delta) \text{ geraden Grad besitzt,} \end{cases}$$

und somit  $k(\tilde{\Delta}) < k(\Delta)$ . Nach maximal  $k(\Delta) - 1$  Unterteilungen hat damit die Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  die gewünschte Eigenschaft.

#

Um die Triangulierung mit möglichst wenigen Splits zu verfeinern, wählen wir die zu unterteilenden Dreiecke nach festgelegten Prioritäten  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , aus.

**Algorithmus 4.2:**

*Unterteile bei jedem Split ein Dreieck  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3) \in \Delta$  der niedrigst möglichen Priorität  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , und bezeichne die resultierende Triangulierung wieder mit  $\Delta$ , bis keiner der folgenden sechs Fälle mehr auftritt.*

$$\mathcal{P}_1: v_1, v_2, v_3 \in V_g(\Delta),$$

$$\mathcal{P}_2: v_1, v_2 \in V_g(\Delta), v_3 \in V_B(\Delta),$$

$$\mathcal{P}_3: v_1, v_2 \in V_g(\Delta), v_3 \notin V_g(\Delta) \text{ und } \exists \Delta(v_3, v_4, v_5) \in \Delta \text{ mit } v_4, v_5 \in V_g(\Delta) \setminus \{v_1, v_2\},$$

$$\mathcal{P}_4: v_1, v_2 \in V_g(\Delta), v_3 \notin V_g(\Delta) \text{ und } (V(\Delta_{v_3}) \setminus \{v_1, v_2\}) \cap V_g(\Delta) = \emptyset,$$

$$\mathcal{P}_5: v_1, v_2 \in V_g(\Delta), v_3 \notin V_g(\Delta),$$

$$\mathcal{P}_6: v_1 \in V_g(\Delta), v_2, v_3 \notin V_g(\Delta) \text{ und für das Dreieck } \Delta(v_2, v_3, v_4) \in \Delta \text{ gilt } v_4 \in V_g(\Delta).$$

Die nach der letzten Unterteilung entstandene Triangulierung bezeichnen wir mit  $\tilde{\Delta}$ .

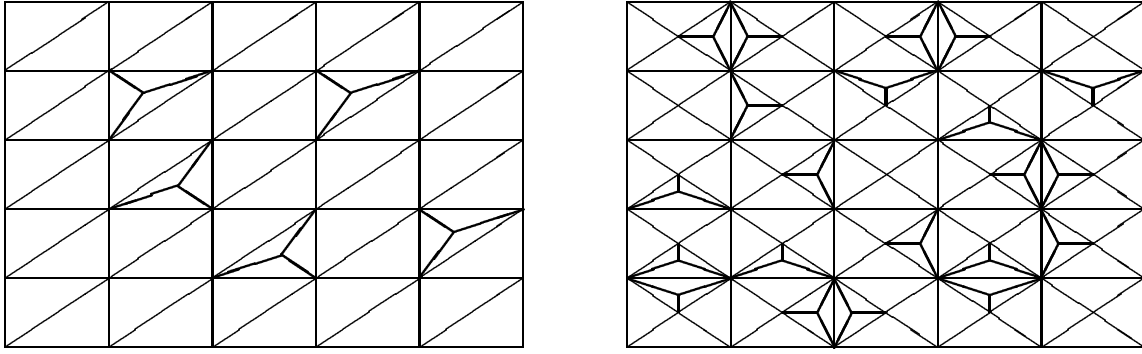


Abb. 16: Verfeinerungen  $\tilde{\Delta}^1$  und  $\tilde{\Delta}^2$  der regelmäßigen Rechteckstriangulierungen.

### Beispiele 4.3:

- (i) Für Triangulierungen, bei denen jeder innere Knoten ungeraden Grad besitzt (vgl. Gao [70]), gilt  $\tilde{\Delta} = \Delta$ , d.h. es werden keine Dreiecke gesplittet.
- (ii) Abbildung 16 zeigt die Verfeinerungen  $\tilde{\Delta}^1$  und  $\tilde{\Delta}^2$  der gleichmäßigen Rechteckstriangulierungen  $\Delta^1$  bzw.  $\Delta^2$ . In beiden Fällen sind alle inneren Knoten geraden Grades. Die Anzahl der Unterteilungen beträgt 5 (von 50) bzw. 21 (von 100).
- (iii) Abbildung 17 zeigt die Verfeinerung  $\tilde{\Delta}$  einer exemplarischen Triangulierung  $\Delta$ . Hier werden nur 5 (von 69) Dreiecke unterteilt. Die Knoten in  $V_g(\Delta)$  sind mit  $\bullet$  markiert, die Knoten in  $V_g(\tilde{\Delta})$  mit  $\blacksquare$ .

## 4.2 Lokale Lagrange-Interpolation

Im Folgenden konstruieren wir Punktmengen zur lokalen Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf den in Abschnitt 4.1 verfeinerten Triangulierungen  $\tilde{\Delta}$ . Dazu markieren wir zunächst in der Zelle jedes inneren Knotens geraden Grades von  $\tilde{\Delta}$  genau ein geeignetes Dreieck und für jeden nichtsingulären, inneren Eckpunkt  $v$  dieser markierten Dreiecke genau eine in  $v$  nichtdegenerierte Kante. Anschließend legen wir unter Verwendung der markierten Dreiecke und Pfade Interpolationspunkte fest. Wesentlich für die Lokalität der Interpolation sind dabei Prioritäten mit denen diese Punkte gewählt werden.

Sei  $V_g(\tilde{\Delta}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann markiere für  $i = 1, \dots, n$  genau ein Dreieck  $T_i \in \Delta_{v_i}$  und für jeden nichtsingulären inneren Eckpunkt  $v$  von  $T_i$  genau eine in  $v$  nichtdegenerierte Kante als Pfad für  $v$ , so dass gilt (vgl. Abbildung 18):

- a) Keine Zelle in  $\tilde{\Delta}$  enthält mehr als ein markiertes Dreieck.
- b) Kein Pfad verbindet zwei markierte Dreiecke.

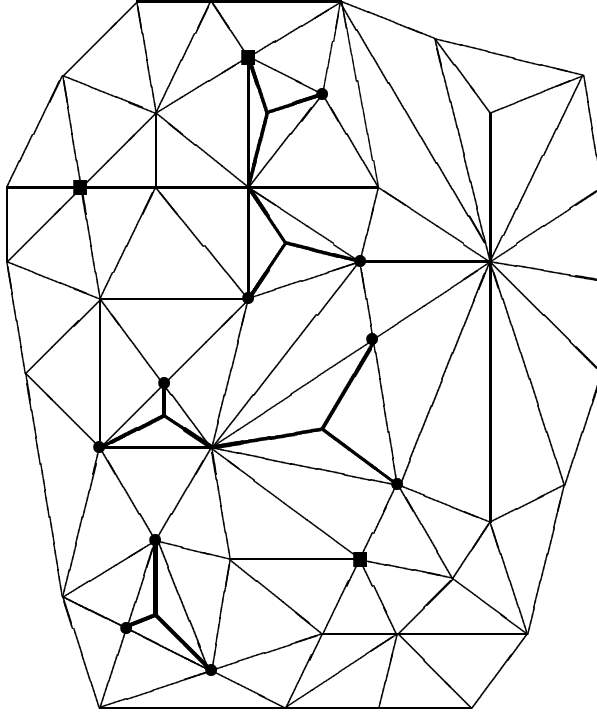


Abb. 17: Verfeinerung einer exemplarischen Triangulierung.

Sei o.B.d.A.  $\tilde{\Delta}$  ohne Randdreiecke, dann setzen wir (vgl. Abbildung 21, oben):

$V_1$  = Menge aller Eckpunkte der markierten Dreiecke,

$V_2 = \{v \in V(\tilde{\Delta}) \setminus V_1 \mid \exists v_1 \in V_1, [v, v_1] \in E(\tilde{\Delta})\},$

$V_3 = V(\tilde{\Delta}) \setminus (V_1 \cup V_2)$  und

$V_4 = V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1.$

Für jeden Knoten  $v_i \in V_2$  bezeichnen wir mit  $e_{i,1}, \dots, e_{i,j_i}$ ,  $j_i \geq 1$ , zuerst die unmarkierten, dann die markierten Kanten der Triangulierung, die  $v_i$  mit einem Knoten in  $V_1$  verbinden und paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Existieren benachbarte Knoten  $v_1, v_2 \in V_2$  mit  $j_1 = j_2 = 1$ , so setzen wir  $e_{1,2} = e_{2,2} = [v_1, v_2]$ . Ist  $v_i \in V_2$  ein (verbleibender) einzelner Knoten in  $V_B(\Delta_v)$ ,  $v \in V_1$ , mit  $j_i = 1$ , so definieren wir  $e_{i,2}$  als eine Kante zu einem benachbarten Knoten in  $V_B(\Delta_v)$  (vgl. Abbildung 20).

Für die Knoten in  $V_3$  und  $V_4$  ordnen wir einigen Dreiecken von  $\tilde{\Delta}$  algorithmisch Typ  $i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , zu. Dabei kann ein Dreieck sowohl vom Typ  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , als auch vom Typ  $j$ ,  $j \in \{4, 5\}$ , sein (vgl. Abbildung 21, oben). Wir definieren zunächst:

**Schritt  $i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ :** Wähle ein Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$ , das genau  $4 - i$  unmarkierte Eckpunkte in  $V_3$  besitzt. Markiere diese Eckpunkte und ordne  $T$  Typ  $i$  zu.

**Schritt  $i$ ,  $i = 4, 5$ :** Wähle ein Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$ , das genau  $6 - i$  unmarkierte Eckpunkte in  $V_4$  besitzt. Markiere diese Eckpunkte und ordne  $T$  Typ  $i$  zu.

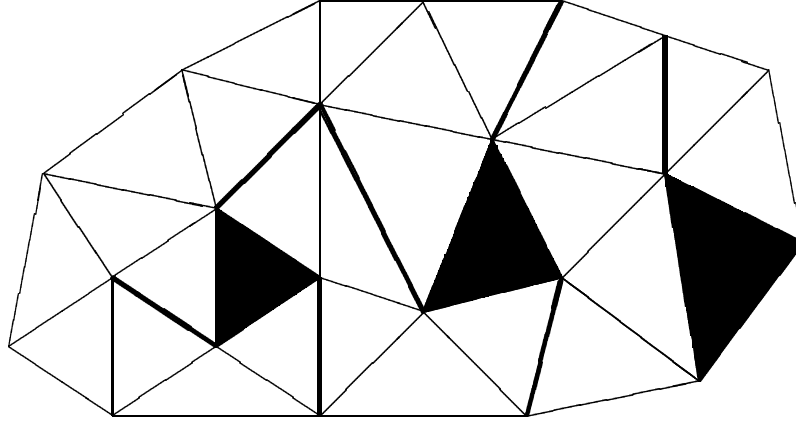


Abb. 18: Mögliche markierte Dreiecke und Kanten einer Triangulierung  $\tilde{\Delta}$ .

**Algorithmus 4.4:**

Seien alle Knoten in  $V_3$  unmarkiert, dann führe jeweils den niedrigst möglichen Schritt  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , durch, bis alle Knoten in  $V_3$  markiert sind. Seien jetzt alle Knoten in  $V_4$  (wieder) unmarkiert. Dann führe jeweils den niedrigst möglichen Schritt  $i$ ,  $i \in \{4, 5\}$ , durch, bis alle Knoten in  $V_4$  markiert sind.

Zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  wählen wir folgende Punkte:

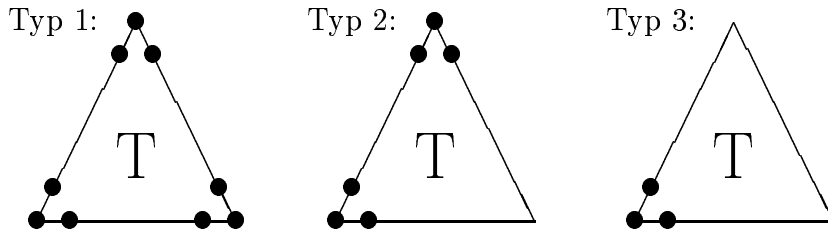
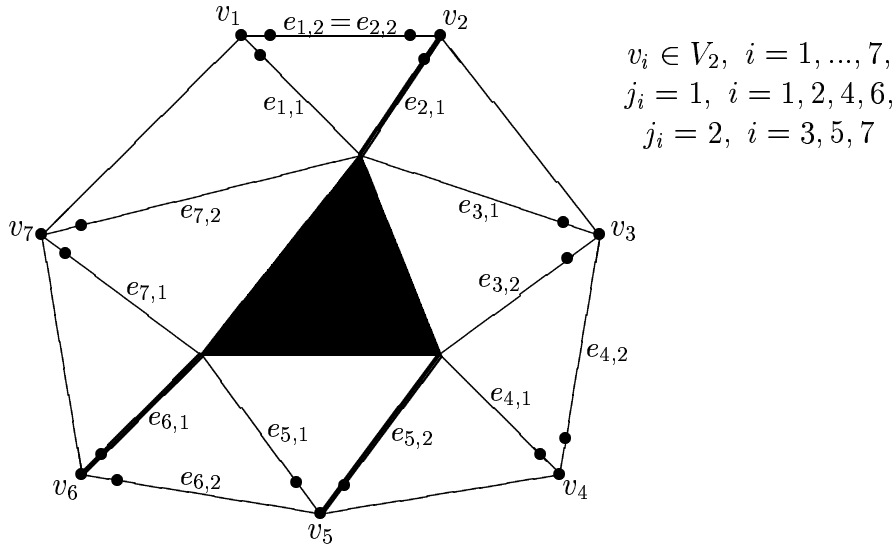
- $\mathcal{L}_1$ : 15 Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_4$ , auf jedem markierten Dreieck;
- $\mathcal{L}_2$ : einen Punkt auf jeder unmarkierten Kante, die nicht auf einem markierten Dreieck liegt;
- $\mathcal{L}_3$ : jeden Knoten  $v_i \in V_2$ , sowie je einen Punkt auf  $e_{i,1}$  und  $e_{i,2}$  (vgl. Abbildung 20);
- $\mathcal{L}_4$ : die in  $V_3$  liegenden Eckpunkte jedes Dreiecks  $T$  des Typs  $i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , sowie für jeden dieser Eckpunkte im Innern der beiden anliegenden Kanten von  $T$  je einen Punkt (vgl. Abbildung 19);
- $\mathcal{L}_5$ : für  $i = 1, 2$  genau  $i$  Punkte im Innern jedes Dreiecks des Typs  $6 - i$  auf einer Strecke, die zu einer Kante des Dreiecks parallel ist.

**Theorem 4.5:**

Sei  $\tilde{\Delta}$  eine beliebige Triangulierung, verfeinert wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Dann ist

$$\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$$

eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ .

Abb. 19: Die Menge  $\mathcal{L}_4$  für Knoten in  $V_3$ .Abb. 20: Reihenfolge der Kanten und gewählte Punkte für die Knoten in  $V_2$ .**Beweis:**

Nach Konstruktion gilt

$$\#\mathcal{L} = 3\#V(\tilde{\Delta}) + \#E(\tilde{\Delta}) + \#V_B(\tilde{\Delta}) + \sigma(\tilde{\Delta}) = \dim(\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}))$$

(vgl. Beweis von Theorem 3.4). Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ , gegeben durch  $s|_T = p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$  für alle  $T \in \tilde{\Delta}$ , und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}$ . Auf jedem markierten Dreieck  $T$  gilt  $s|_T \equiv 0$ , da  $s$  eindeutige Lösung des homogenen Interpolationsproblems auf  $T$  ist.

Im Folgenden betrachten wir zunächst die in  $V_1$ , dann die in  $V(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$  liegenden Knoten. Sei dazu  $v \in V(\tilde{\Delta})$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_j = [v, v_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $d_j$  für  $j = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang  $e_j$  und  $\Delta_v = \{T_j = \Delta(v, v_j, v_{j+1}), j = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten ent falle das Dreieck  $T_n$ . Ferner sei o.B.d.A.  $T_1$  das markierte Dreieck, falls  $v \in V_1$ . Wir unterscheiden fünf Fälle.

**Fall 1:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist nichtsingulär;

Sei  $e_r$ ,  $r \in \{3, \dots, n\}$ , der Pfad von  $v$ . Dann existieren für jeden Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq r$ , zwei Kanten  $e_{i,j_1} = [v_i, w_1]$ ,  $e_{i,j_2} = [v_i, w_2] \in E(\tilde{\Delta})$ , wobei  $w_1, w_2$  in  $V_1$  oder  $V_B(\Delta_v)$



liegen. Die  $C^1$ -Stetigkeit in  $w_1$  und  $w_2$  sowie die Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}_2$  und  $\mathcal{L}_3$  auf  $e_{i,j_1}$  und  $e_{i,j_2}$  implizieren  $s|_{e_{i,j_1}} \equiv s|_{e_{i,j_2}} \equiv 0$ . Aus der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_i$  und  $v$  sowie dem Interpolationspunkt in  $\mathcal{L}_2$  auf  $e_i$  folgt  $s|_{e_i} \equiv 0$ , also insbesondere  $p_{d_i^2}^{[T_i]}(v) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq r$ . Wegen  $s|_{T_1} \equiv 0$  gilt  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$ . Aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq r$ , folgt  $p_{d_i d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über der Kante  $e_r$  impliziert schließlich  $p_{d_r^2}^{[T_r]}(v)$ . Daher gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 2:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist singulär;

Analog Fall 1 gilt  $s|_{e_j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , also insbesondere  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Wegen  $s|_{T_1} \equiv 0$  folgt  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$ . Aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , ergibt sich  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 2, \dots, 4$ , und insgesamt

$$D^w p^{[T_j]}(v) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 3:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \cap V_1$ ;

Analog Fall 1 gilt  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , und  $p_{d_n^2}^{[T_{n-1}]}(v) = 0$ . Aus  $s|_{T_1} \equiv 0$  folgt  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  und mit der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , schließlich  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ . Somit gilt

$$D^w p^{[T_j]}(v) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 4:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Für  $v \in V_2$  implizieren Fall 1 bis Fall 3  $D^w s(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ . Gilt  $v \in V_3$ , so gibt es ein Dreieck  $T = \Delta(v, w_1, w_2) \in \tilde{\Delta}$  vom Typ  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , und mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}_2$  und  $\mathcal{L}_4$  auf  $T$  sowie der  $C^1$ -Stetigkeit in  $w_1$  und  $w_2$  folgt ebenfalls  $D^w s(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ . Es ergibt sich  $D^w s(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ , für alle  $v \in V(\tilde{\Delta})$ . Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_2$  implizieren somit  $s|_{e_j} \equiv 0$ , also insbesondere  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Da  $n$  ungerade ist, folgt aus der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , nach Lemma 2.5  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und insgesamt

$$D^w p^{[T_j]}(v) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad w = 0, \dots, 2.$$

**Fall 5:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Aus Fall 1 bis Fall 4 folgt  $s|_e \equiv 0$  für alle  $e \in E(\tilde{\Delta})$ . Nach Konstruktion gibt es ein Dreieck  $T = \Delta(v, w_1, w_2) \in \Delta_v$  vom Typ 4 oder Typ 5, wobei o.B.d.A.  $w_1 \in V_I(\tilde{\Delta})$ . Daher existiert ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_1$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , Geraden durch die Kanten von  $T$  sind. Ist  $T$  vom Typ 4, so folgt aus  $D^2 p^{[T]}(w_1) \equiv 0$  und den beiden Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_5$  im Innern von  $T$ , dass  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ . Ist  $T$  vom Typ 5, so wurden  $w_1, w_2$  bereits behandelt, und es gilt  $D^w p^{[T]}(w_1) \equiv D^w p^{[T]}(w_2) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , und es existiert ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[w_1, w_2]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$ ,  $j = 2, 3$ , Geraden durch die beiden anderen Kanten von  $T$  sind. Der Interpolationspunkt in  $\mathcal{L}_5$  im Innern von  $T$  impliziert  $q^{[T]} \equiv 0$ , also ebenfalls  $p^{[T]} \equiv 0$ . Der Rest des Beweises von Fall 5 verläuft analog dem Beweis von Fall 3.

Insgesamt gilt  $D^w p^{[T]}(v) = 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für jeden Knoten  $v \in V(\tilde{\Delta})$  und jedes Dreieck  $T$  mit Eckpunkt  $v$ . Dies impliziert  $s \equiv 0$  und damit die Behauptung.

#

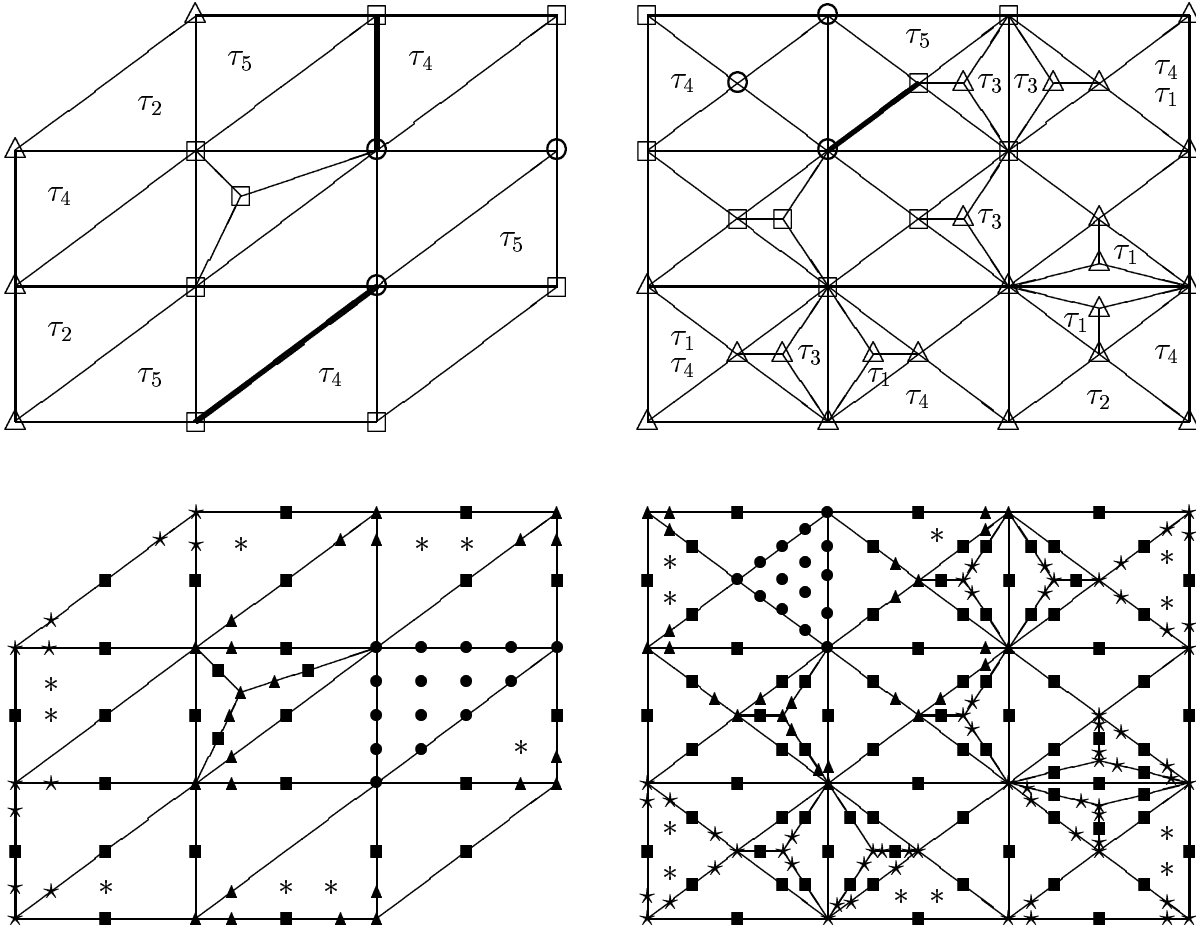


Abb. 21: Knoten in  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , und Interpolationspunkte für  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}^1)$  bzw.  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}^2)$ .

**Beispiele 4.6:**

- Abbildung 21 zeigt eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}^1)$  bzw.  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}^2)$ . Die Punkte in  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , sind in dieser Reihenfolge mit  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\star$  und  $*$  bezeichnet (unten), die in  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , liegenden Knoten mit  $\circ$ ,  $\square$  und  $\triangle$ , Dreiecke vom Typ  $i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , mit  $\tau_i$  (oben).
- Abbildung 22 zeigt eine Lagrange-Interpolationsmenge für quartische  $C^1$ -Splines auf der exemplarischen Triangulierung aus Abbildung 18.

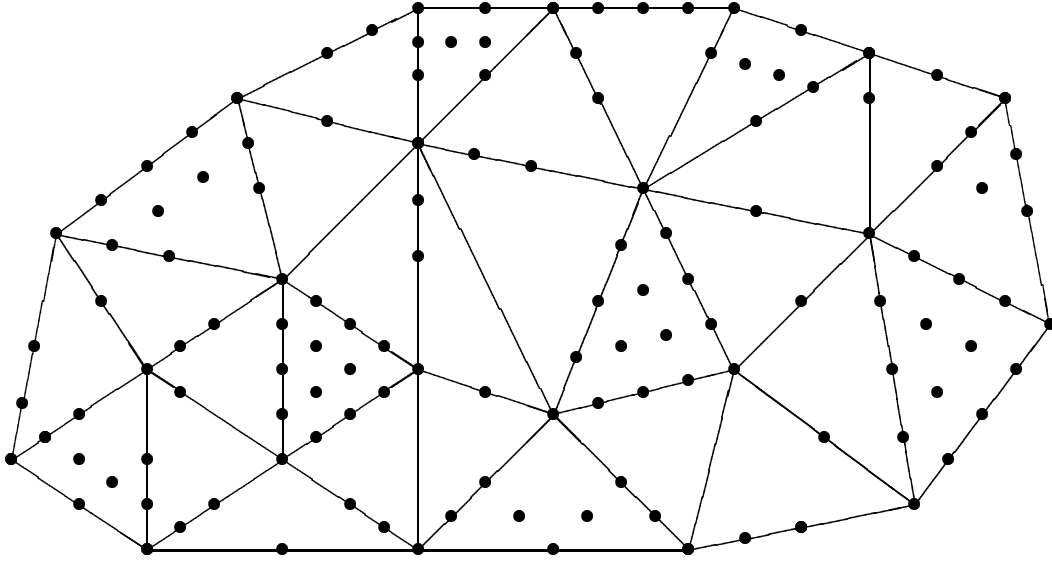


Abb. 22: Interpolationspunkte für die exemplarische Triangulierung aus Abbildung 18.

**Bemerkungen 4.7:**

- 1.) Wesentlich für die Lokalität der Interpolation ist, dass die jeweils drei Interpolationspunkte für die Knoten in  $V_2$  zuerst möglichst auf unmarkierten Kanten und dann erst auf markierte Kanten zu Knoten in  $V_1$  gelegt werden.
- 2.) Die Interpolationspunkte für die Knoten in  $V_3$  werden in einer Modifikation des von Nürnberger und Zeilfelder [118] entwickelten Kantenalgorithmus gewählt.

**Theorem 4.8:**

Sei  $\mathcal{L}$  wie in Theorem 4.5,  $m = \dim(\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta}))$  und  $\{s_1, \dots, s_m\}$  die duale Basis von  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  bzgl.  $\mathcal{L}$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  einen Knoten  $v \in V(\tilde{\Delta})$ , so dass

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^9(v).$$

**Beweis:**

Im Folgenden sei  $d_{i,j}$  einen Einheitsvektor entlang der Kante  $e_{i,j} := [v_i, v_j]$ . Für  $z_i \in \mathcal{L}$  unterscheiden wir vier Fälle.

**Fall 1:**  $z_i \in \mathcal{L}_1$ ;

Liegt  $z_i$  auf einem Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$ , so können wegen  $s|_T \not\equiv 0$  Funktionswert und partielle Ableitungen von  $s$  in den Eckpunkten von  $T$  ungleich Null sein. Sei  $v_1$  solch ein Eckpunkt und  $e_{1,2}$  die Kante zu einem Knoten  $v_2 \notin T$ , dann folgt  $s|_{e_{1,2}} \not\equiv 0$ .

**Fall 1.1:**  $e_{1,2}$  ist der Pfad von  $v_1$ ;

a)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist nicht der Pfad von  $v_3$ ;

Die Interpolationspunkte auf  $e_{2,3}$  und die  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_2$  und  $v_3$  implizieren  $s|_{e_{2,3}} \equiv 0$  und damit

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}(v_1).$$

b)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist der Pfad von  $v_3$ ;

Aus  $s|_{e_{1,2}} \not\equiv 0$  kann  $s_{d_{2,3}}(v_2) \neq 0$  und damit  $s|_{d_{2,3}} \not\equiv 0$  folgen. Da  $e_{2,3}$  der Pfad von  $v_3$  ist, gilt jedoch  $s|_e \equiv 0$  für alle anderen Kanten  $e$  mit Endpunkt  $v_3$ . Dies impliziert (vgl.  $v_2$  hier mit  $v_4$  in Abbildung 23, oben)

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_1).$$

c) Jeder benachbarte Knoten  $v_3$  von  $v_2$ ,  $v_3 \notin T$ , liegt nicht in  $V_1$ ;

Für  $v_3 \in V_2$  gilt  $s|_e \equiv 0$  für jede Kante  $e$  mit Endpunkt  $v_3$ ,  $e \neq e_{2,3}$ , und damit

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_1).$$

Gilt  $v_3 \in V_3$ , so existiert evtl. ein Dreieck  $T_1 = \Delta(v_2, v_3, w) \in \tilde{\Delta}$  des Typs  $i$ ,  $i \in \{2, 3\}$ . Jedes Dreieck  $T_2 = \Delta(v_3, v_4, \tilde{w}) \in \tilde{\Delta}$  kann vom Typ 3 sein, falls  $i = 2$ , nicht aber vom Typ 2, denn sonst wäre  $T_2$  vor  $T_1$  Typ 1 zugeordnet worden. Ebenso existiert kein weiteres Dreieck  $T_3 = \Delta(v_4, v_5, \hat{w}) \in \tilde{\Delta}$  vom Typ 3, denn sonst wäre  $T_3$  vor  $T_2$  Typ 2 zugeordnet worden. Die Interpolationspunkte auf  $e_{i,i+1}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , und die  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , implizieren  $s|_{e_{i,i+1}} \not\equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Ferner gilt  $s|_e \equiv 0$  für alle Kanten  $e$  mit Endpunkt  $v_4$ ,  $e \neq e_{3,4}$ . Da  $v_4$  ungeraden Grad besitzt, folgt aus  $s_{d_{4,3}^2}(v_4) \neq 0$  und der  $C^1$ -Stetigkeit nach Lemma 2.5, dass  $D^2 s(v_4) \neq 0$ . Gibt es kein Dreieck  $T_3 = \Delta(v_5, v_6, w_1) \in \tilde{\Delta}$ ,  $v_6 \in V_B(\tilde{\Delta})$ , vom Typ  $i$ ,  $i \in \{4, 5\}$ , so folgt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^4(v_1).$$

Existiert solch ein  $T_3$ , so gilt  $s|_{T_3} \not\equiv 0$  und damit  $s_{dd_{5,6}}(v_5) \neq 0$ ,  $d$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_5, w_1]$ . Ist  $T_3$  vom Typ 4, so existiert eventuell ein weiteres Dreieck  $T_4 = \Delta(v_6, v_7, w_2) \in \tilde{\Delta}$  vom Typ 5 mit  $s_{\tilde{d}d_{6,7}}(v_6) \neq 0$ ,  $\tilde{d}$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_6, w_2]$ . Jedes weitere Dreieck  $T_5 = \Delta(v_7, v_8, w_3)$  kann nicht vom Typ 5 sein, denn sonst wäre  $T_5$  vor  $T_4$  Typ 4 zugeordnet worden. Insgesamt folgt (vgl.  $v_2$  hier mit  $v_4$  in Abbildung 23, unten)

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^6(v_1).$$

**Fall 1.2:**  $e_{1,2}$  ist nicht der Pfad von  $v_1$ ;

a)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist nicht der Pfad von  $v_3$ ;

Die  $C^1$ -Stetigkeit im Knoten  $v_2$  kann  $s_{d_{2,3}}(v_2) \neq 0$  und damit  $s|_{e_{2,3}} \not\equiv 0$ , also insbesondere

$s_{d_{3,2}^2}(v_3) \neq 0$  implizieren. Mit der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_3$  kann  $s_{d_{3,4}^2}(v_3) \neq 0$  für den Pfad  $e_{3,4}$  von  $v_3$  sein. Analog Fall 1.1 gilt daher (vgl. Abbildung 23)

$$\text{supp}(s_i) \subset st^8(v_1).$$

b)  $v_2$  liegt in der Zelle eines Knotens  $v_3 \in V_1$ ,  $v_3 \notin T$ ,  $e_{2,3}$  ist der Pfad von  $v_3$ ; Analog Fall 1.1 b) gilt (vgl.  $v_2$  hier mit  $v_4$  in Abbildung 23 oben)

$$\text{supp}(s_i) \subset st^2(v_1).$$

c) Jeder benachbarte Knoten  $v_3$  von  $v_2$ ,  $v_3 \notin T$ , liegt nicht in  $V_1$ ; Analog Fall 1.1 c) gilt (vgl.  $v_2$  hier mit  $v_4$  in Abbildung 23 unten)

$$\text{supp}(s_i) \subset st^6(v_1).$$

Da diese Konstellationen für alle drei Eckpunkte des Dreiecks  $T$  auftreten können, gilt in Fall 1 für einen Eckpunkt  $v$  von  $T$

$$\text{supp}(s_i) \subset st^9(v).$$

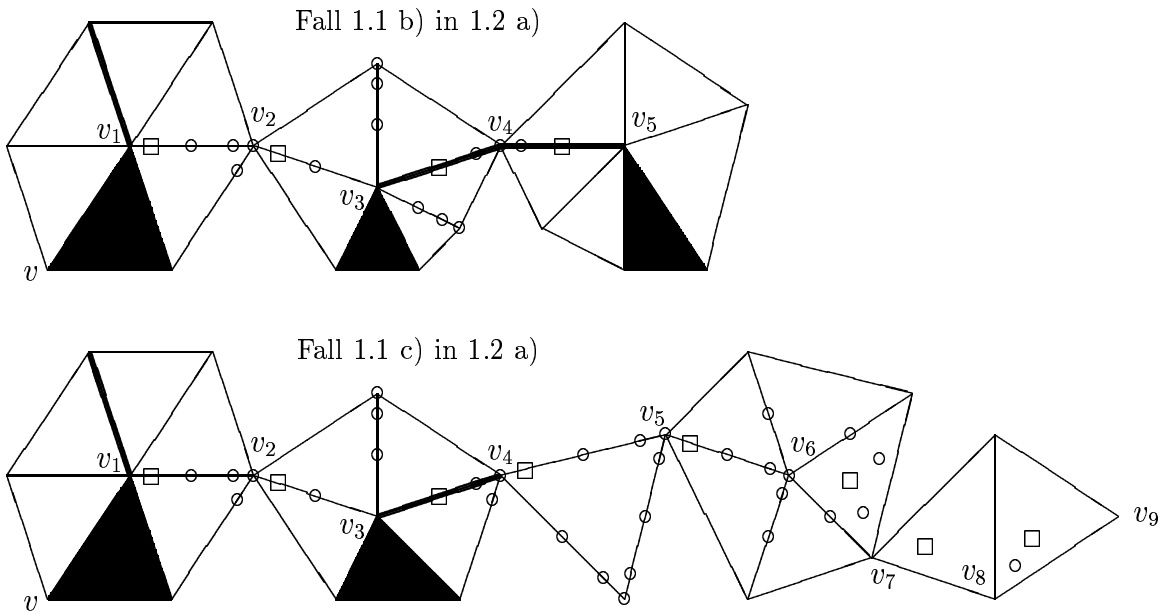


Abb. 23: Punkte in Fall 1: ○ Null interpoliert, □ evtl. ungleich Null daraus berechnet.

**Fall 2:**  $z_i \in \mathcal{L}_2$ ;

Liegt  $z_i$  im Innern einer Kante  $e = [v_0, v_1]$ , so ist  $e$  wegen  $z_i \in \mathcal{L}_2$  kein Pfad.

**Fall 2.1:**  $v_0 \in V_1$ ;

Aus  $s|_e \neq 0$  kann  $s_{d_{1,2}}(v_1) \neq 0$  für eine Kante  $e_{1,2}$  mit  $v_2 \in V_1$  folgen. Andererseits gilt  $s_{\tilde{d}_{0,1}^2}(v_0) \neq 0$  für den Pfad  $\tilde{e}_{0,1} = [v_0, \tilde{v}_1]$  von  $v_0$ . Analog Fall 1.1 impliziert dies (vgl. Abbildung 24, oben)

$$\text{supp}(s_i) \subset st^8(v_0).$$

**Fall 2.2:**  $e \in E_B(\Delta_v)$ ,  $v \in V_1$ ,  $v_0, v_1 \notin V_1$ ;

Betrachten wir o.B.d.A.  $v_1$ . Für einen benachbarten Knoten  $v_2 \in V_B(\Delta_v)$  kann  $s|_{e_{1,2}} \not\equiv 0$  sein. Ist  $v_1$  oder  $v_2$  zu einem  $v_3 \in V_1$  benachbart, so folgt mit den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_3$ , dass  $s|_{e_{1,3}} \equiv 0$  bzw.  $s|_{e_{2,3}} \equiv 0$  und daher

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^2(v_0).$$

Andernfalls gilt analog Fall 1.1 c) (vgl. Abbildung 24, unten)

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^7(v_0).$$

**Fall 2.3:**  $v_0 \in V_3$  oder  $v_1 \in V_3$ ;

Ist  $e$  Kante eines Dreieck vom Typs  $i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , so gilt analog Fall 1.1 c) (vgl. Abbildung 25, unten)

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^6(v_0).$$

Gehört  $e$  zu keinem Dreieck des Typs  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , so folgt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}(v_0).$$

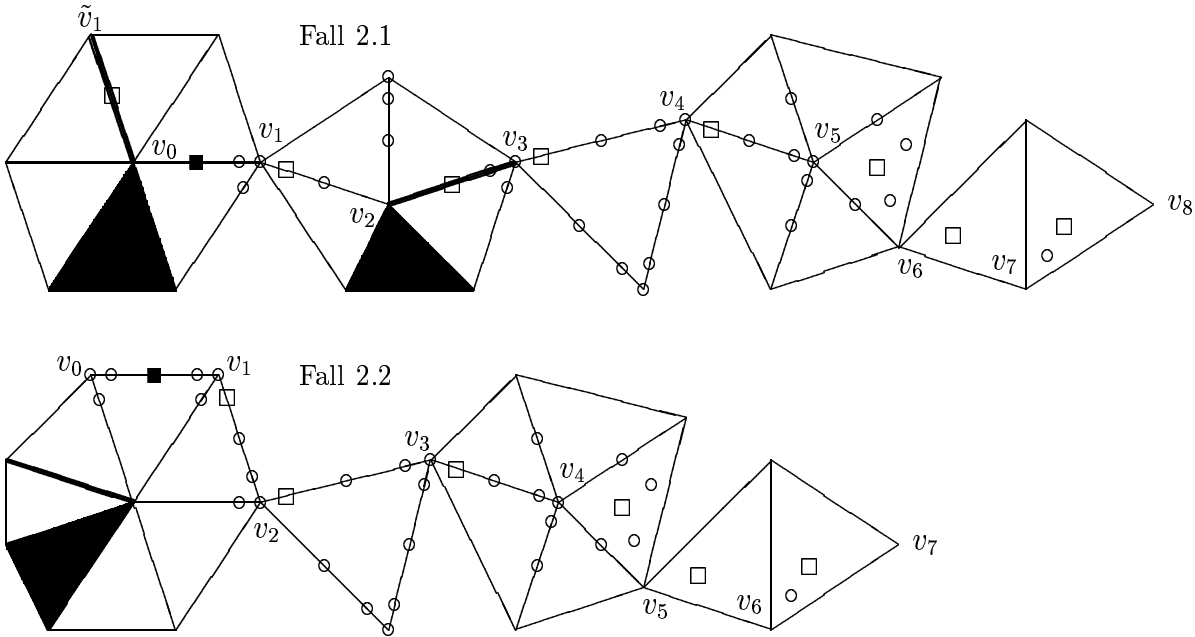


Abb. 24: Punkte in Fall 2: ■  $z_i$ , ○ Null interpoliert, □ evtl. ungleich Null berechnet.

**Fall 3:**  $z_i \in \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4$ . Es gelte  $z_i \in [v_0, v_1]$ ;

**Fall 3.1:**  $v_0 \in V_2$ ;

Für  $v_1 \in V_1$  gilt wie in Fall 1 (vgl. Abbildung 25, oben) und für  $v_1 \in V_2$  gilt wie in Fall 2.2 (vgl. Abbildung 24, unten) jeweils

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^7(v_0).$$

**Fall 3.2:**  $v_0, v_1 \in V_3$ ;

Analog Fall 2.3 (vgl. Abbildung 25, unten) gilt

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^6(v_1).$$

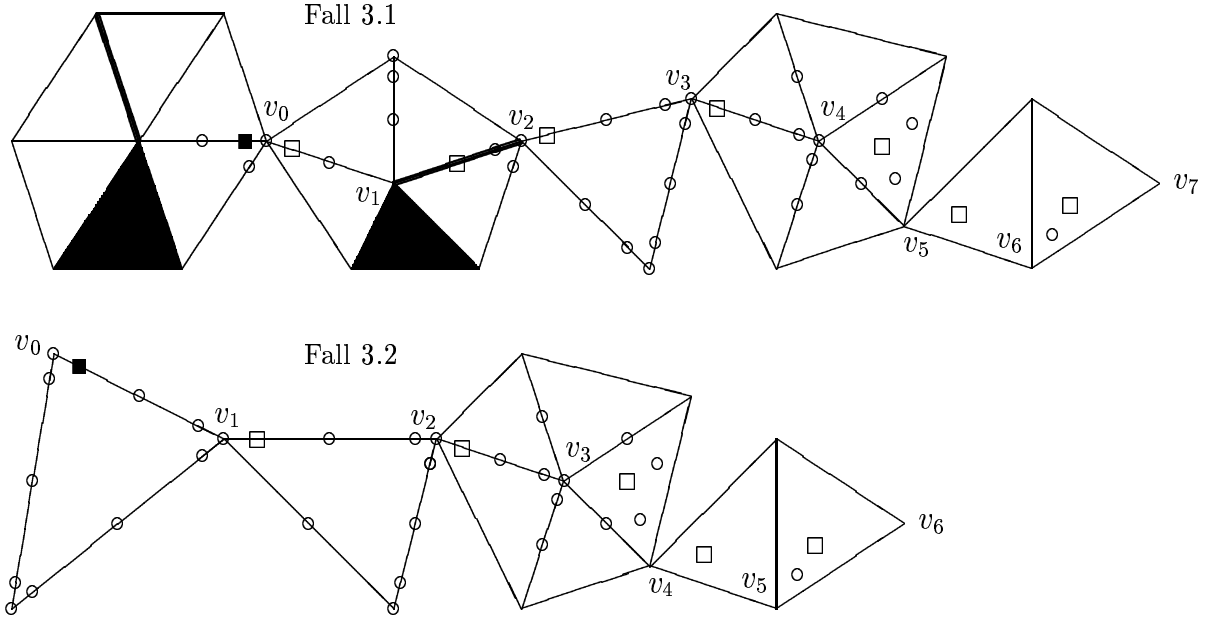


Abb. 25: Punkte in Fall 3: ■  $z_i$ , ○ Null interpoliert, □ evtl. ungleich Null berechnet.

**Fall 4:**  $z_i \in \mathcal{L}_5$ ;

Analog Fall 1.1 c) gilt (vgl.  $v$  hier mit  $v_3$  in Abbildung 25, unten)

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^3(v).$$

#

#### Bemerkungen 4.9:

- Aus  $\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^9(v)$  für die Fundamentalsplines von  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  folgt nicht, dass  $s_i$  auf allen Dreiecken von  $\text{st}^9(v)$  verschieden von Null ist. Vielmehr ist es so, dass  $s_i$  nur auf kleinen Bereichen, so etwa kurze Ketten von Dreiecken, Funktionswerte ungleich Null annimmt.
- Die Fundamentalsplines, die ein Hilfsmittel zum Beweis der Lokalität der Interpolation sind, spielen bei der Berechnung des Interpolanten  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  keine Rolle. Der Spline  $s$  wird aus den gegebenen Interpolationsbedingungen schrittweise effizient durch Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme bestimmt.

### 4.3 Approximationsordnung der Interpolation

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Approximationsgüte der in Paragraph 4.2 beschriebenen Methode zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$ . Dazu verwenden wir die von Nürnberger [107] (siehe auch Nürnberger und Walz [110], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [51,56], Nürnberger und Zeilfelder [118]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation. Zunächst untersuchen wir den Interpolationsfehler in den  $C^1$ - und  $C^2$ -Bereichen der Knoten sowie auf den Kanten der Triangulierung. In der zentralen Aussage beweisen wir dann die Optimalität der Approximationsordnung des Interpolationsverfahrens. Sei  $h = |\tilde{\Delta}|$  und  $\alpha$  der kleinste Winkel in  $\tilde{\Delta}$ . Wir betrachten nun einerseits die Summe der beiden anliegenden Winkel, für jede markierte Kante von  $\tilde{\Delta}$ , und andererseits den zwischen den Kanten  $e_{i,1}$  und  $e_{i,2}$  eingeschlossenen Winkel, für jeden Knoten  $v_i \in V_2$ . Den am nächsten an  $\pi$  liegenden Winkel davon bezeichnen wir mit  $\beta$ .

Für  $f \in C^5(\Omega)$  sei  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  mit  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_4$  für alle Dreiecke  $T \in \tilde{\Delta}$  die eindeutige Interpolationsfunktion an  $f$  bzgl.  $\mathcal{L}$ . Ferner sei  $v \in V(\tilde{\Delta})$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_l = [v, v_l]$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $d_l$  für  $l = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang  $e_l$  und  $\Delta_v = \{T_l = \Delta(v, v_l, v_{l+1}), l = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten entfalle das Dreieck  $T_n$ .

**Lemma 4.10:**

*Existieren für zwei linear unabhängige Einheitsvektoren  $d_i, d_j$  zwei (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i, C_j > 0$ , so dass*

$$|(f - s)_{d_i}(v)| \leq C_i \cdot h^4 \quad \text{und} \quad |(f - s)_{d_j}(v)| \leq C_j \cdot h^4,$$

*so gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit*

$$\|D^1(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^4.$$

**Beweis:**

Sei o.B.d.A.  $i = 1$ . Für  $1 < k < j$  bezeichne  $\alpha_1$  den von  $e_1$  und  $e_k$  sowie  $\alpha_k$  den von  $e_k$  und  $e_j$  eingeschlossenen Winkel. (Der Fall  $1 < j < k$  wird analog bewiesen.)

Dann gilt  $\sin(\alpha_1 + \alpha_k)e_k = \sin(\alpha_k)e_1 + \sin(\alpha_1)e_j$  für  $k = 2, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , und damit

$$\begin{aligned} |(f - s)_{d_k}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_j}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_j \cdot h^4 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_1 \cdot h^4 \leq C_k \cdot h^4, \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $K = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| (C_1 + C_j) > 0$ , die unabhängig von  $k$  ist. Es folgt die Behauptung.

#

**Lemma 4.11:**

*Existieren (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass*

$$\left| (f - p^{[T_i]})_{d_i^2}(v) \right| \leq C_i \cdot h^3,$$



(für jeden inneren, nichtsingulären Eckpunkt  $v$  eines markierten Dreiecks entfalle die Ungleichung für  $i = n$ ), sowie eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_{1,2} > 0$ , falls  $v$  ein singulärer Knoten, Randknoten oder Eckpunkt eines markierten Dreiecks ist, mit

$$|(f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^3,$$

so gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit

$$\|D^2(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^3.$$

### Beweis:

Sei  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$ ,  $e_{n+1} = e_1$ , eingeschlossene Winkel. Dann betrachten wir fünf Fälle. Die Konstante  $K$  ergibt sich als Maximum aller auftretenden Konstanten.

**Fall 1:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist nichtsingulär;

Falls  $e_2$  in  $v$  degeneriert ist, so folgt

$$|(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| = |-(f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^3.$$

Andernfalls folgt aus  $\sin(\alpha_1)e_3 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)e_2 - \sin(\alpha_2)e_1$ , dass

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2^2}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_2 \cdot h^3 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_{1,2} \cdot h^3 \leq C_{2,3} \cdot h^3 \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängigen) Konstanten  $C_{2,3} = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| (C_2 + C_{1,2}) > 0$ .

Mit analogem Argument existiert für  $i = 3, \dots, n-1$  eine (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängige) Konstante  $C_{i,i+1} > 0$ , so dass

$$|(f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v)| \leq C_{i,i+1} \cdot h^3.$$

Letztlich gilt  $\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)e_n = \sin(\alpha_n)e_{n-1} + \sin(\alpha_{n-1})e_1$  und damit

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_n]})_{d_{n-1} d_n}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_n d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n-1,n} \cdot h^3 + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n,1} \cdot h^3 \leq C_n \cdot h^3 \end{aligned}$$

für eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_n = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| (C_{n-1,n} + C_{n,1}) > 0$ .

**Fall 2:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \cap V_1$  ist singulär;

Da alle Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , im Knoten  $v$  degeneriert sind, folgt

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| &= |-(f - p^{[T_3]})_{d_3 d_4}(v)| = |(f - p^{[T_4]})_{d_4 d_1}(v)| \\ &= |-(f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^3. \end{aligned}$$

**Fall 3:**  $v \in V_I(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Zur Bestimmung der gemischten partiellen Ableitungen gibt es folgendes lineares Gleichungssystem (vgl. Lemma 2.5):

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v) \\ \vdots \\ (f - p^{[T_n]})_{d_n d_1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n (f - p^{[T_1]})_{d_1^2}(v) \\ \vdots \\ b_1 (f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v) \end{pmatrix}.$$

wobei  $a_i = \sin(\alpha_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $b_i = \sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ .

Sei  $A$  die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite der Gleichung und  $A_i$  die Matrix die aus  $A$  entsteht, indem die  $i$ -te Spalte durch den Ergebnisvektor ersetzt wird. Nach der Cramerschen Regel folgt dann für  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v)| &= \left| \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \right| = \left| \frac{\sin(\alpha_i) \left( \sum_{j=1}^n \left( \prod_{l \neq j-1, j}^n \sin(\alpha_l) \right) (-1)^{\sigma_j} \sin(\alpha_{j-1} + \alpha_j) (f - p^{[T_j]})_{d_j^2}(v) \right)}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^n (f - p^{[T_j]})_{d_j^2}(v)}{2 \left( \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right)} \leq \frac{\sum_{j=1}^n C_j \cdot h^3}{2 \left| \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right|} \leq C_{i,i+1} \cdot h^3, \end{aligned}$$

wobei  $\sigma_j = 1$ , falls  $i < j$ ,  $\sigma_j = 0$  sonst, mit einer (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängigen) Konstanten

$$C_{i,i+1} = n \cdot \frac{\max\{C_j, j=1, \dots, n\}}{2 \left| \prod_{j=1}^n \sin(\alpha_j) \right|} > 0.$$

**Fall 4:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \cap V_1$ ;

Analog Fall 1 folgt für  $i = 2, \dots, n-1$  die Existenz einer (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängigen) Konstanten  $C_{i,i+1} > 0$ , so dass

$$|(f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v)| \leq C_{i,i+1} \cdot h^3.$$

**Fall 5:**  $v \in V_B(\tilde{\Delta}) \setminus V_1$ ;

Mit den Interpolationpunkten in  $\mathcal{L}_5$  im Innern eines Dreiecks  $T_i \in \Delta_v$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , sowie Fall 1 bis Fall 4 für die Eckpunkte von  $T_i$  sind auf  $T_i$  die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Es gibt daher eine (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängige) Konstante  $C_{i,i+1} > 0$ , so dass

$$|(f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v)| \leq C_{i,i+1} \cdot h^3.$$

Der Rest des Beweises von Fall 5 verläuft wie in Fall 1.

#

Wir betrachten nun die Approximationsordnung univariater Lagrange-Interpolation. Sei  $f \in C^5(e)$  für eine Strecke  $e = [u, v]$  der Länge  $h$  gegeben und  $p \in \Pi_4$  das eindeutige Interpolationspolynom an  $f$  bzgl. einer Interpolationsmenge  $\mathcal{L} = \{z_1, \dots, z_m\}$ ,  $m \in \{2, \dots, 5\}$ ,

wobei  $z_1 = u$ ,  $z_2 = v$  und  $l_1, l_2 \in \{0, \dots, 2\}$  mit  $l_1 + l_2 \leq 3$ , derart dass  $m + l_1 + l_2 = 5$ . Ferner sei  $d_1$  bzw.  $d_2$  ein Einheitsvektor von  $u$  nach  $v$  bzw. von  $v$  nach  $u$ .

**Lemma 4.12:**

Existieren zwei (nur von  $f$  abhängige) Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , so dass

$$\left| (f - p)_{d_1^{k_1}}(u) \right| \leq C_1 \cdot h^{5-k_1} \quad \text{und} \quad \left| (f - p)_{d_2^{k_2}}(v) \right| \leq C_2 \cdot h^{5-k_2}$$

für  $k_i = 0, \dots, l_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gibt es eine (nur von  $f$  abhängige Konstante)  $K_e > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  und  $i = 1, 2$  gilt:

$$\|(f - p)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{5-w}.$$

**Beweis:**

Da  $p \in \Pi_4$  die gegebene Funktion  $f$  interpoliert, gilt

$$(f - p)(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Mit den gegebenen Ungleichungen in  $u$  und  $v$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.15 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Es gibt folglich eine (nur von  $f$  abhängige) Konstante  $K_e > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  und  $i = 1, 2$  gilt:

$$\|(f - p)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{5-w}.$$

#

Wir beweisen nun die Optimalität der Approximationsordnung der in Paragraph 4.2 beschriebenen Methode zur Lagrange-Interpolation mit quartischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen.

**Theorem 4.13:**

Sei  $f \in C^5(\Omega)$  gegeben und  $s \in \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})$  die eindeutige Interpolationsfunktion an  $f$  bzgl. der Menge  $\mathcal{L}$  in Theorem 4.5. Dann existiert eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)\| \leq K \cdot h^{5-w}.$$

**Beweis:**

Wir zeigen, dass auf jedem Dreieck  $T \in \tilde{\Delta}$  die Interpolationsfunktion  $p^{[T]} \equiv s|_T$  die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Da die Interpolation lokal ist, müssen nur endlich viele Dreiecke in der Umgebung von  $T$  und daher nur endlich viele Fälle betrachtet werden. Letztlich ergibt sich die Konstante  $K$  unabhängig von  $h$  als das Maximum der in den verschiedenen Fällen auftretenden Konstanten.

**Fall 1:** Interpolation auf markierten Dreiecken;

Sei  $T$  ein markiertes Dreieck und  $\mathcal{L}_T$  die Menge der Punkte von  $\mathcal{L}$  auf  $T$ . Dann gilt

$$|(f - p^{[T]})(z)| = 0, \quad z \in \mathcal{L}_T.$$

Nach Lemma 2.14 gibt es daher eine Konstante  $K_1 > 0$  (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\|D^w(f - p^{[T]})\| \leq K_1 \cdot h^{5-w}.$$

**Fall 2:** Interpolation auf unmarkierten Dreiecken;

Sei  $T$  ein unmarkiertes Dreieck. Dann gibt es nach Lemma 4.12 Konstanten  $K_{e_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_{e_i}\| \leq K_{e_i} \cdot h^{5-w}$$

für die Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , des Dreiecks  $T$ . In den Eckpunkten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , von  $T$  implizieren Lemma 4.10 und Lemma 4.11 die Existenz von Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 2\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)(v_i)\| \leq C_i \cdot h^{5-w}.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = 5$  erfüllt. Folglich gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K_2 > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, 4\}$  gilt:

$$\|D^w(f - p^{[T]})\| \leq K_2 \cdot h^{5-w}.$$

#

**Korollar 4.14:**

Für jede Funktion  $f \in C^5(\Omega)$  gibt es eine (nur von  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , so dass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_4^1(\tilde{\Delta})) \leq K \cdot h^5.$$

**Bemerkung 4.15:**

Es ist bekannt, dass fast-degenerierte Kanten und fast-singuläre Knoten bei der Berechnung des Interpolanten zu numerischen Instabilitäten führen können (vgl. Lai und Schumaker [93]). Solche Konstellationen werden hier durch den Winkel  $\beta$  beschrieben. In Anwendungsgebieten werden für  $\beta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$  und kleines  $\epsilon > 0$  die entsprechenden Kanten und Knoten als degeneriert bzw. singulär interpretiert und die markierten Kanten bzw. die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_2$  und  $\mathcal{L}_3$  entsprechend anders gelegt.

## Kapitel 5:

# Lokale Lagrange-Interpolation mit $C^1$ -Splines vom Grad $\geq 5$

In diesem Kapitel untersuchen wir lokale Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 5$ . Auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  bestimmten Morgan und Scott [101] die Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ . Ohne dabei Bézier-Bernstein-Techniken zu benutzen, verwendeten sie Interpolationsbedingungen an Funktionswerte und partielle Ableitungen und konstruierten so spezielle Basen dieser Splineräume. Darauf aufbauend bestimmte Davydov [50] alternative Hermite-Interpolationsmengen, bei denen die Basisfunktionen lokal linear unabhängig sind. Für  $C^r$ -Supersplineräume vom Grad  $\geq 3r + 2$  entwickelten Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] unter Verwendung der Dimensions-Resultate von Ibrahim und Schumaker [78] eine Methode zur lokalen Hermite-Interpolation, die optimale Approximationsordnung besitzt. Außerdem gaben Davydov und Nürnberger [54] einen Algorithmus zur nicht-lokalen Lagrange- und Hermite-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  an. Darüber hinaus existieren zahlreiche Verfahren zur lokalen und nicht-lokalen Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines niederen Grades auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen oder geeignet verfeinerten, beliebigen Triangulierungen, die sich auf  $C^1$ -Splines höheren Grades übertragen lassen (siehe [64,105,106,109,112,113,118]).

Wir entwickeln in diesem Kapitel die erste Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , auf beliebigen Triangulierungen, bei der keine Dreiecke gesplittet werden, und die optimale Approximationsordnung besitzt. In Abschnitt 5.1 zerlegen wir im ersten Schritt dieser Methode die Triangulierung algorithmisch in sieben verschiedene Klassen von Dreiecken. Anschließend legen wir für jeden inneren, nichtsingulären Knoten  $v$  eine geeignete, in  $v$  nichtdegenerierte Kante als Pfad fest. Im Gegensatz zur Interpolation mit quartischen Splines (vgl. Kapitel 3 und 4) kann hier eine Kante für beide Endpunkte als Pfad dienen. Unter Verwendung dieser Pfade wählen wir dann in Abschnitt 5.2 für  $q \geq 5$  Interpolationspunkte für die jeweiligen Dreieckstypen und konstruieren so Lagrange-Interpolationsmengen für den Spliner Raum  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ . Anschließend bestimmen wir die Trägergröße der zur Interpolationsmenge gehörenden Fundamentalsplines und weisen damit die Lokalität der Lagrange-Interpolation nach. Mithilfe der von Nürnberger [107] (siehe auch Nürnberger und Walz [110], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56], Nürnberger und Zeilfelder [118]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation beweisen wir im letzten Abschnitt des Kapitels, dass dieses Verfahren zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , optimale Approximationsordnung besitzt.

## 5.1 Dreieckstypen und geeignete Pfade

In diesem Abschnitt zerlegen wir die gegebene Triangulierung  $\Delta$  algorithmisch in sieben Klassen von Dreiecken Typ  $i$ ,  $i = 0, \dots, 6$ . Dazu verwenden wir sieben Schritte. Nachdem in Schritt 1 Dreiecke vom Typ 0 festgelegt wurden, definieren wir darauf basierend geeignete Pfade für die Knoten der Triangulierung. In Abhängigkeit dieser Pfade ordnen wir dann in den Schritten 2 bis 7 den verbleibenden Dreiecken jeweils einen Typ zu.

Für Algorithmus 5.1 definieren wir folgende Schritte:

**Schritt 1:** Wähle ein  $T \in \Delta$ , das drei unmarkierte Eckpunkte besitzt. Ordne  $T$  Typ 0 zu und markiere die Eckpunkte von  $T$ .

**Schritt 2:** Wähle ein  $T \in \Delta$ , das genau zwei unmarkierte Eckpunkte besitzt und dessen Kanten keine Pfade sind. Ordne  $T$  Typ 1 zu und markiere die Eckpunkte von  $T$ .

**Schritt 3:** Wähle ein  $T \in \Delta$ , das genau einen unmarkierten Eckpunkt  $v$  besitzt und dessen Kanten nicht der Pfad von  $v$  sind. Ordne  $T$  Typ 2 zu, markiere  $v$ .

**Schritt  $i$ ,  $i \geq 4$ :** Wähle ein  $T \in \Delta$ , das genau  $i - 4$  Nachbardreiecke besitzt, denen bereits ein Typ zugeordnet wurde. Ordne  $T$  Typ  $i - 1$  zu.

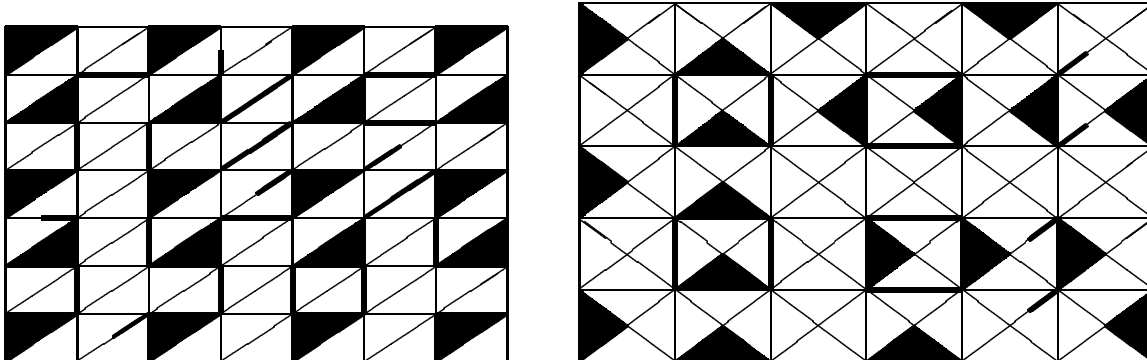


Abb. 26: Dreiecke vom Typ 0 (schwarz) und geeignete Pfade für  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ .

Zwischen Schritt 1 und Schritt 2 werden unter Verwendung von Prioritäten geeignete Pfade festgelegt. Sei  $V_{in}$  die Menge aller inneren, nichtsingulären Knoten von  $\Delta$ . Dann wählen wir für jedes  $v \in V_{in}$  eine in  $v$  nichtdegenerierte Kante als Pfad für  $v$ . Dabei kann eine Kante  $[u, v] \in E(\Delta)$  für  $u$  und  $v$  als Pfad dienen, sofern sie in beiden Knoten nichtdegeneriert ist. Wir verwenden drei Prioritäten:

**Priorität 1:** Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante  $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$ , falls für beide Knoten  $v_i, v_j \in V_{in}$  noch kein Pfad gewählt wurde und  $e$  in beiden Knoten nichtdegeneriert ist. Markiere  $e$  als doppelten Pfad für  $v_i$  und  $v_j$ .

**Priorität 2:** Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante  $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$ ,  $v_j \notin V_{in}$ , falls für  $v_i \in V_{in}$  noch kein Pfad gewählt wurde und  $e$  in  $v_i$  nichtdegeneriert ist. Markiere  $e$  als einfachen Pfad für  $v_i$ .

**Priorität 3:** Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante  $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$ ,  $v_j \in V_{in}$ , falls für  $v_i \in V_{in}$  noch kein Pfad gewählt wurde und  $e$  in  $v_i$  nichtdegeneriert ist. Markiere  $e$  als einfachen Pfad für  $v_i$ .

Bei der Festlegung der Pfade wählen wir Kanten so oft wie möglich Pfade mit Priorität 1. Anschließend legen wir Kanten so oft wie möglich nach Priorität 2 fest. Für alle verbleibenden Knoten in  $V_{in}$  wählen wir zuletzt Pfade mit Priorität 3. Dabei beachten wir, dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es entstehen keine drei aufeinanderfolgenden Pfade (vgl. Abbildung 27).
- (ii) Für zwei benachbarte Knoten  $v_1, v_2 \in V(\Delta)$ , die nicht Eckpunkt eines Dreiecks vom Typ 0 sind, ist in mindestens einem Dreieck  $T = \Delta(v_1, v_2, w) \in \Delta$  keine Kante von  $T$  ein Pfad (vgl. Abbildung 28).

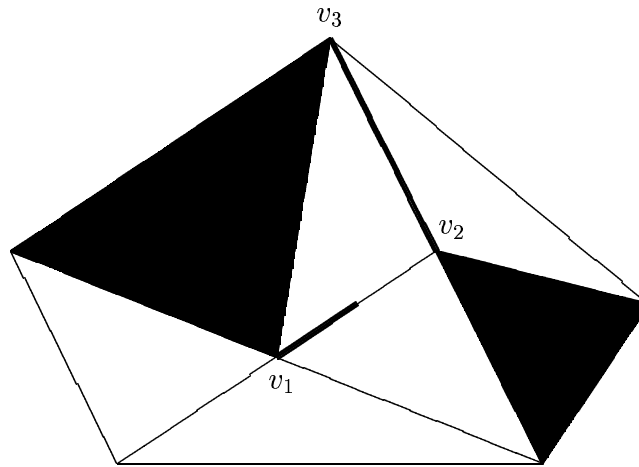


Abb. 27: Erlaubte Konstellation mit Pfad der Länge 2.

Wir formulieren nun den Algorithmus zur Zuordnung der Dreieckstypen und zur Festlegung der Pfade. Sei dazu  $\Delta$  beliebig gegeben und seien alle Knoten von  $\Delta$  unmarkiert.

#### Algorithmus 5.1:

*Führe so oft wie möglich Schritt 1 durch. Dann definiere unter Verwendung der Prioritäten die Pfade der Triangulierung. Im Anschluss führe so oft wie möglich Schritt 2 durch. Für die verbleibenden unmarkierten Knoten der Triangulierung führe Schritt 3 durch. Danach führe stets den niedrigst möglichen Schritt  $i$ ,  $i = 4, \dots, 7$ , durch, bis alle Dreiecke der Triangulierung einen Typ besitzen.*

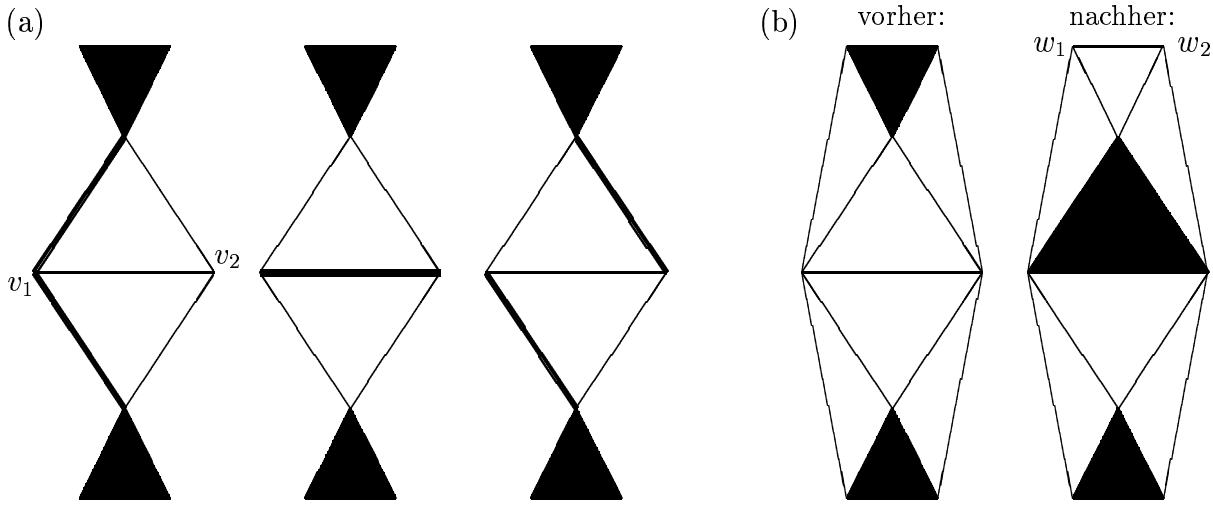


Abb. 28: (a) zu vermeidende Pfadkonstellationen; (b) lokale Modifikation.

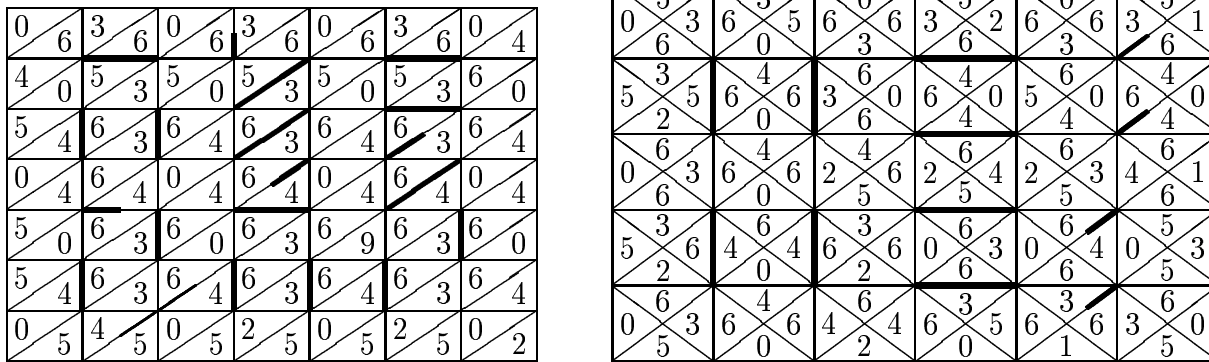


Abb. 29: Typzuordnung der Dreiecke von  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ .

### Bemerkungen 5.2:

- Abbildung 28 zeigt Ausnahmesituationen, in denen es nicht möglich ist Pfade so zu wählen, dass Bedingung (ii) erfüllt ist (links). In diesem Fall führen wir lokal eine neue Zuordnung von Typ 0 durch (rechts). Da sich zwei neue unmarkierte Knoten  $w_1, w_2 \in V(\Delta)$  ergeben, ist es eventuell notwendig, einem weiteren Dreieck von  $\Delta$  Typ 0 zuzuordnen.
- Ist ein Dreieck vom Typ 1, so gilt nach Bedingung (ii), dass keine Kante dieses Dreiecks ein Pfad ist. Bei der Zuordnung von Typ 2 hingegen muss nur der Pfad (falls dieser existiert) des entsprechenden unmarkierten Knotens außerhalb des Dreiecks liegen. Da  $\text{Grad}(v) \geq 3$  für alle  $v \in V_{in}$ , gibt es in Schritt 3 stets eine geeignete Wahl eines solchen Dreiecks in  $\Delta_v$ .



- Eine Typzuordnung für die regelmäßigen Rechteckstriangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  ist in Abbildung 29 zu sehen. Die dick markierten Kanten bilden die zwischen Schritt 1 und Schritt 2 festgelegten einfachen und doppelten Pfade für die Knoten in  $V_{in}$ .
- Abbildung 30 zeigt die Zerlegung einer exemplarischen Triangulierung in Dreieckstypen. Die festgelegten Pfade der Knoten in  $V_{in}$  sind dick markiert.

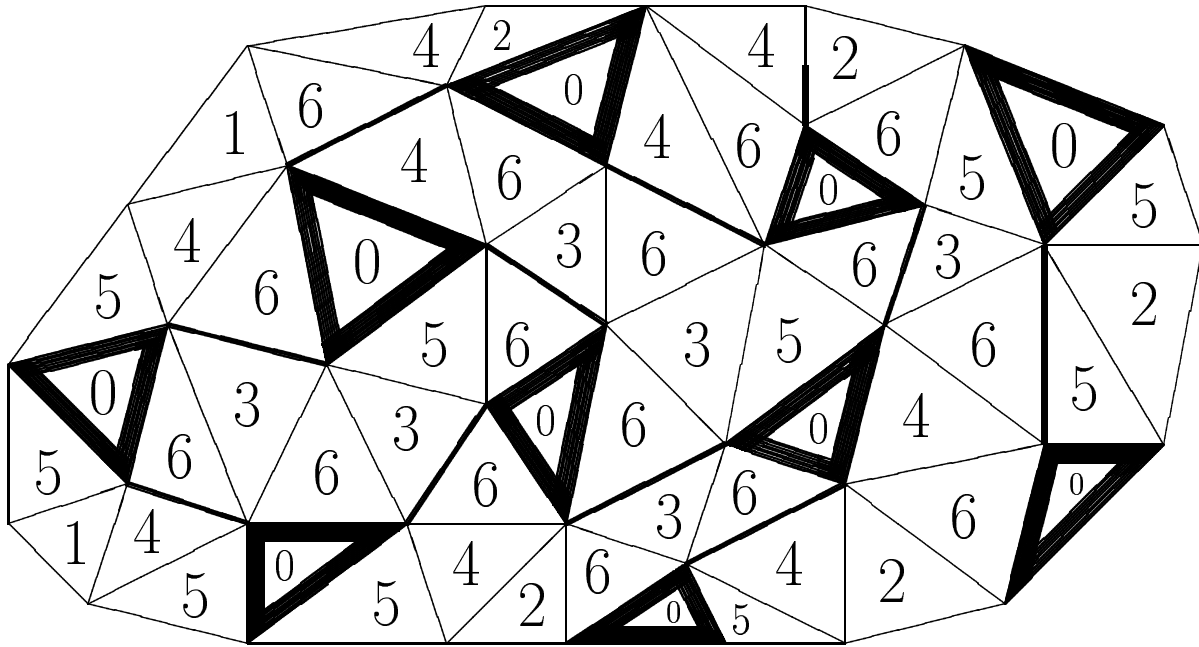


Abb. 30: Exemplarische Triangulierung mit möglichen Dreieckstypen und Pfaden.

## 5.2 Lokale Lagrange-Interpolation

Auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  konstruieren wir in diesem Abschnitt unter Verwendung der festgelegten Pfade und der Zerlegung der Triangulierung in verschiedene Klassen von Dreiecken Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ . Nach Morgan und Scott [101] ist die Dimension dieser Räume bekannt. Für  $q \geq 5$  gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta)) = \binom{q+2}{2} + \binom{q}{2} \#E_I(\Delta) - [(\binom{q+2}{2} - \binom{3}{2}) \#V_I(\Delta) + \sigma(\Delta)].$$

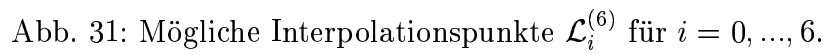
Wir wählen nun Interpolationspunkte für die verschiedenen Klassen von Dreiecken. Um eine Lokalität der Interpolation zu gewährleisten, müssen für Dreiecke vom Typ 2 Punkte eventuell auf benachbarte Kanten gelegt werden (vgl. Abbildung 37). Für solche Dreiecke werden unmarkierte Kanten vor Pfaden priorisiert: Ist  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  vom Typ 2, wobei

$v_1, v_2$  die Eckpunkte von Dreiecken des Typs  $\leq 1$  sind, dann bezeichnen wir mit  $e_1, \dots, e_j$ ,  $j \geq 2$ , zuerst die unmarkierten Kanten, dann die Pfade der Triangulierung, die  $v_3$  mit einem Eckpunkt eines Dreiecks des Typs  $\leq 1$  verbinden und paarweise verschiedene Steigungen besitzen.

Sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ , dann wählen wir Interpolationspunkte wie folgt (vgl. Abbildung 31):

- $\mathcal{L}_0^{(q)}$ :  $\binom{q+2}{2}$  Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_q$  auf jedem Dreieck des Typs 0.
- $\mathcal{L}_1^{(q)}$ :  $v_2, v_3$ , 2 Punkte auf  $[v_2, v_3]$ , je einen Punkt auf  $[v_3, v_1]$  und  $[v_2, v_1]$ ,  $q-3$  Punkte jeweils auf  $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$  und  $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$ ,  $q-4$  Punkte auf  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  und für  $q \geq 6$  genau  $\binom{q-4}{2}$  nicht auf diesen Strecken liegende Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ , auf jedem Dreieck des Typ 1, wobei  $v_1$  der Eckpunkt eines Dreiecks vom Typ 0 ist.
- $\mathcal{L}_2^{(q)}$ : a)  $v_3$ , je einen Punkt auf  $e_1$  und  $e_2$  (vgl. mit  $v_4$  in Abbildung 37), sowie  $\binom{q-2}{2}$  Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-4}$  im Innern jedes Dreiecks vom Typ 2, falls das Nachbardreieck mit gemeinsamer Kante  $[v_1, v_2]$  vom Typ  $\leq 1$  ist oder vom Typ 2 ist, und für dieses bereits Punkte gewählt wurden (vgl. Abbildung 32).  
b)  $q-3$  Punkte auf  $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$ ,  $q-4$  Punkte jeweils auf  $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$  und  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  und für  $q \geq 6$  genau  $\binom{q-4}{2}$  nicht auf diesen Strecken liegende Punkte im Innern, zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ , sonst.
- $\mathcal{L}_3^{(q)}$ :  $q-3$  Punkte auf  $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$ ,  $q-4$  Punkte auf  $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$ ,  $q-5$  Punkte auf  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  und für  $q \geq 6$  genau  $\binom{q-4}{2}$  nicht auf diesen Strecken liegende Punkte im Innern, zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ , auf jedem Dreieck des Typs 3.
- $\mathcal{L}_4^{(q)}$ :  $q-4$  Punkte auf  $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$  und  $\binom{q-3}{2}$  nicht auf dieser Strecke liegende Punkte im Innern, zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$ , auf jedem Dreieck des Typs 4, wobei  $[v_2, v_3]$  die Kante zum benachbarten Dreieck des Typs  $\leq 3$  ist.
- $\mathcal{L}_5^{(q)}$ :  $\binom{q-3}{2}$  Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$  im Innern jedes Dreiecks vom Typ 5.
- $\mathcal{L}_6^{(q)}$ : Für  $q \geq 6$  genau  $\binom{q-4}{2}$  Punkte zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$  im Innern jedes Dreiecks vom Typ 6.
- $\mathcal{L}_7^{(q)}$ :  $q-3$  Punkte im Innern jeder Kante, die kein Pfad ist und die nicht zu einem Dreieck des Typs 0 gehört,  $q-4$  Punkte im Innern jedes einfachen Pfads und  $q-5$  Punkte im Inneren jedes doppelten Pfads.

Wir beweisen zunächst eine Aussage für einzelne Knoten der Triangulierung. Sei  $v \in V(\Delta)$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_i = [v, v_i]$ ,  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ein Einheitsvektor entlang  $e_i$  und  $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten entfällt das Dreieck  $T_n$ . Falls  $v$  ein innerer, nichtsingulärer Knoten ist, so sei o.B.d.A.  $e_r$ ,  $r \geq 3$ , der Pfad von  $v$ . Ferner sei  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , gegeben durch  $s|_{T_i} \equiv p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$ ,  $i = 1, \dots, n$ .



Aus  $p^{[T_1]} \equiv 0$  und  $s_{|_{e_j}} \equiv 0$ ,  $j = 3, \dots, n$ ,  $j \neq r$ , folgt  $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w = 0, \dots, 2$ .

Die  $C^1$ -Stetigkeit im Knoten  $v$  und  $s|_{T_1} \equiv 0$  implizieren  $D^w s(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ , sowie  $p_{d_2^2}^{[T_1]}(v) = p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = p_{d_3^2}^{[T_1]}(v) = 0$ . Wir unterscheiden drei Fälle (vgl. Abbildung 33):

Wegen  $s|_{e_j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq r$ , gilt insbesondere  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq r$ . Aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq r$ , und  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  daraus  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Da  $e_r$  in  $v$  nichtdegeneriert ist, impliziert  $p_{d_{r-1} d_r}^{[T_r]}(v) = p_{d_r d_{r+1}}^{[T_r]}(v) = 0$  und die  $C^1$ -Stetigkeit über der Kante  $e_r$  schließlich  $p_{d_r^2}^{[T_r]}(v) = 0$ . Insgesamt gilt  $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w = 0, \dots, 2$ .

Wegen  $s_{|e_j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , gilt insbesondere  $p_{d_2^{[T_j]}}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Aus  $p_{d_1 d_2^{[T_1]}}(v) = 0$

und der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , folgt  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Dies impliziert  $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $w = 0, \dots, 2$ .

**Fall 3:**  $v \in V_B(\Delta)$ ;

Wegen  $s_{|e_j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gilt insbesondere  $p_{d_j^2}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sowie  $p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = 0$  implizieren  $p_{d_j d_{j+1}}^{[T_j]}(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , also  $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w = 0, \dots, 2$ .

#

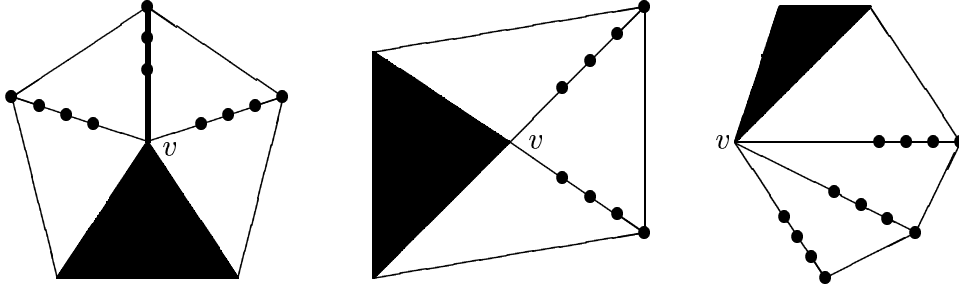


Abb. 33: Lagrangepunkte für Knoten in Lemma 5.3 für  $q = 5$ .

**Theorem 5.4:**

Sei  $q \geq 5$  und  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung. Dann ist

$$\mathcal{L}^{(q)} := \bigcup_{i=0}^7 \mathcal{L}_i^{(q)}$$

eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ .

**Beweis:**

In der Menge  $\mathcal{L}^{(q)}$  sind nach Konstruktion enthalten:

- 3 Punkte für jeden Knoten in  $V(\Delta)$ ,
- $q-3$  Punkte für jede Kante in  $E(\Delta)$  (einige davon liegen im Inneren eines berührenden Dreiecks vom Typ  $\leq 2$ ),
- 1 Punkt für jeden singulären Knoten und jeden Randknoten,
- $\binom{q-4}{2}$  Punkte im Inneren jedes Dreiecks in  $\Delta$ , und
- $q-4$  Punkte im Inneren eines anliegenden Dreiecks, für jede Kante in  $E(\Delta)$ . (Für jede innere Kante liegen diese Punkte im anliegenden Dreieck des niedrigeren Typs.)

Daraus ergibt sich mit den Formeln von Euler

$$\begin{aligned}
 \#\mathcal{L}^{(q)} &= 3\#V(\Delta) + (q-3)\#E(\Delta) + \#V_B(\Delta) + \sigma(\Delta) + \binom{q-4}{2}\#N(\Delta) + (q-4)\#E(\Delta) \\
 &= \left[\binom{q-4}{2} + 4q - 10\right]\#E_I(\Delta) - \left[\binom{q-4}{2} + 6q - 12\right]\#V_I(\Delta) + \left[\binom{q-4}{2} + 6q - 9\right] + \sigma(\Delta) \\
 &= \binom{q+2}{2} + \binom{q}{2}\#E_I(\Delta) - \left[\binom{q+2}{2} - \binom{3}{2}\right]\#V_I(\Delta) + \sigma(\Delta) \\
 &= \dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta)).
 \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta$ , und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}^{(q)}$ .

Sei  $e := [u, v] \in E(\Delta)$  eine Kante, die nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegt. Ist  $e$  kein Pfad, so folgt aus  $D^w s(u) \equiv D^w s(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ , und den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  im Innern von  $e$ , dass  $s|_e \equiv 0$ . Gleiches gilt, falls  $e$  ein einfacher bzw. doppelter Pfad ist, und zusätzlich  $D^2 p^{[T]}(u) \equiv 0$  bzw.  $D^2 p^{[T]}(u) \equiv D^2 p^{[T]}(v) \equiv 0$  für ein anliegendes Dreieck  $T$  gilt. Sind drei Knoten  $v_1, v_2, v_3 \in V(\Delta)$  durch den Pfad  $e_{1,2} := [v_1, v_2]$  von  $v_1$  und den Pfad  $e_{2,3} := [v_2, v_3]$  von  $v_2$  und  $v_3$  verbunden, so wird  $D^w p^{[T]}(v_i)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , nach Lemma 5.3 zuerst für  $v_1$ , dann für  $v_2$  und zuletzt für  $v_3$  bestimmt.

Im Folgenden sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $e_i = [v_i, v_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , wobei  $v_4 = v_1$  und  $v_5 = v_2$ . Wir zeigen nun, dass  $s|_T \equiv 0$  für alle Dreiecke  $T \in \Delta$ . Dabei unterscheiden wir acht Fälle:

**Fall 1:**  $T$  ist vom Typ 0;

Die Menge  $\mathcal{L}_0^{(q)}$  auf  $T$  ist eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{P}_q$ . Daher gilt  $s|_T \equiv 0$ .

**Fall 2:**  $T$  ist vom Typ 1;

Da keine der drei Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , von  $T$  ein Pfad ist, implizieren die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_1^{(q)}$  und  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  auf diesen Kanten  $s|_{e_i} \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Mit der  $C^1$ -Stetigkeit in  $v_1$  und Fall 1 folgt nach Lemma 5.3, dass  $D^w p^{[T]}(v_1) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v_1$ , wobei  $v_1$  der Eckpunkt eines Typ 0 Dreiecks ist. Wegen der Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_1^{(q)}$  auf den Strecken  $[v_j, \frac{v_{j+1}+v_{j+2}}{2}]$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , gibt es folglich ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot l_6(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  und  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 4, \dots, 6$  eine Gerade durch  $[v_{i-3}, \frac{v_{i-2}+v_{i-1}}{2}]$  ist. Die verbleibenden  $\binom{q-4}{2}$  Punkte in  $\mathcal{L}_1^{(q)}$  im Innern von  $T$  implizieren  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 3:**  $T$  ist vom Typ 2, Fall a)  $\Delta(v_1, v_2, w) \in \Delta$  ist vom Typ  $\leq 2$ ;

Liegt ein Punkt von  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  auf einer Kante  $e := [v_j, w]$ ,  $j \in \{1, \dots, 3\}$ , außerhalb von  $T$ , so implizieren die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  und die  $C^1$ -Stetigkeit in  $w$ , dass  $s|_e \equiv 0$ . Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  und  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  auf den Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , von  $T$  sowie  $D^w p^{[T]}(v_1) \equiv D^w p^{[T]}(v_2) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , implizieren daher  $s|_{e_i} \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Mit der  $C^1$ -Stetigkeit über  $e_1$  gibt es folglich ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  ist. Die verbleibenden  $\binom{q-2}{2}$  Punkte in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  im Innern von  $T$  implizieren  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 4:**  $T$  ist vom Typ 2, Fall b);

Analog Fall 3 gilt  $s_{|e_i} \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Mit den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  im Innern der Strecken  $[v_i, \frac{v_{i+1}+v_{i+2}}{2}]$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , existiert daher ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot l_6(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  und  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 4, \dots, 6$  eine Gerade durch  $[v_{i-3}, \frac{v_{i-2}+v_{i-1}}{2}]$  ist. Die verbleibenden  $\binom{q-5}{2}$  Punkte im Innern von  $T$  implizieren  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 5:**  $T$  ist vom Typ 3;

Aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  auf den verbleibenden Kanten in  $E(\Delta)$  und der  $C^1$ -Stetigkeit in den Knoten von  $\Delta$  folgt  $s_{|e} \equiv 0$  für alle  $e \in E(\Delta)$ . Nach Lemma 5.3 gilt  $D^w p^{[T]}(v_i) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Mit den Punkten in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  auf den Strecken  $[v_i, \frac{v_{i+1}+v_{i+2}}{2}]$ ,  $i = 1, 2$ , existiert daher ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  und  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 4, 5$  eine Gerade durch  $[v_{i-3}, \frac{v_{i-2}+v_{i-1}}{2}]$  ist. Für  $q = 5$  folgt  $q^{[T]}(v_3) = 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ . Für  $q \geq 6$  implizieren die Punkte in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  auf der Strecke  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  die Existenz eines Polynoms  $\tilde{q}^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot l_6(z) \cdot \tilde{q}^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_6(x, y) = a_6 x + b_6 y + c_6 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  ist. Aus den verbleibenden  $\binom{q-4}{2}$  Punkten in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  im Innern von  $T$  folgt  $\tilde{q}^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 6:**  $T$  ist vom Typ 4;

Aus  $s_{|e} \equiv 0$  für alle  $e \in E(\Delta)$ , der  $C^1$ -Stetigkeit über der Kante  $e_1$  und den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_4^{(q)}$  im Innern der Strecke  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  folgt die Existenz eines Polynoms  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T.$$

Dabei ist  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  und  $g_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_4(x, y) = a_4 x + b_4 y + c_4 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ . Die  $\binom{q-3}{2}$  Punkte in  $\mathcal{L}_4^{(q)}$  im Innern von  $T$  liefern schließlich  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 7:**  $T$  ist vom Typ 5;

Wegen der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_1$  und  $e_2$  sowie  $s|_e \equiv 0$  für alle  $e \in E(\Delta)$  gibt es ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2^2(z) \cdot l_3(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  ist. Die  $\binom{q-3}{2}$  Punkte in  $\mathcal{L}_5^{(q)}$  im Innern von  $T$  implizieren  $q^{[T]} \equiv 0$  und somit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

**Fall 8:**  $T$  ist vom Typ 6;

Die  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten von  $T$  sowie  $s|_e \equiv 0$  für alle  $e \in E(\Delta)$  implizieren für  $q = 5$ , dass  $p^{[T]} \equiv 0$ . Für  $q \geq 6$  gibt es ein Polynom  $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2(z) \cdot l_2^2(z) \cdot l_3^2(z) \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei  $g_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0\}$  für  $i = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_i$  ist. Aus den  $\binom{q-4}{2}$  Punkten in  $\mathcal{L}_6^{(q)}$  im Innern von  $T$  folgt schließlich  $q^{[T]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T]} \equiv 0$ .

Insgesamt gilt  $p^{[T]} \equiv 0$  für alle  $T \in \Delta$ , also  $s \equiv 0$ .

#

**Theorem 5.5:**

Sei  $q \geq 5$ ,  $d_q = \dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta))$  und  $\{s_i, i = 1, \dots, d_q\}$  die duale Basis von  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$  bzgl.  $\mathcal{L}$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \{1, \dots, d_q\}$  einen Knoten  $v \in V(\Delta)$ , so dass

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^8(v).$$

**Beweis:**

Für  $z_i \in \mathcal{L}^{(q)} \subset \Omega$  sei  $s \equiv s_i \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta$ . Ferner sei  $e_{j,k} := [v_j, v_k]$  für alle benachbarten Knoten  $v_j, v_k \in V(\Delta)$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

**Fall 1:**  $z_i \in \mathcal{L}_3^{(q)} \cup \mathcal{L}_4^{(q)} \cup \mathcal{L}_5^{(q)} \cup \mathcal{L}_6^{(q)}$ ;

Sei  $z_i \in T$ , dann gilt  $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle Eckpunkte  $v$  von  $T$ , da alle Funktionswerte sowie 1. und 2. Ableitungen in den Knoten von  $\Delta$  Null sind. Darüber hinaus können zwei benachbarte Dreiecke  $T_1$  und  $T_2$  nach Konstruktion nicht vom gleichen Typ  $\geq 3$  sein, denn:

- 1.) Ist  $T_1$  vom Typ 3, so kann  $T_2$  niedrigstenfalls vom Typ 4 sein.
- 2.) Sind beide Dreiecke vom Typ 4 oder vom Typ 5, und wurde o.B.d.A. zuerst dem Dreieck  $T_1$  ein Typ zugeordnet, so wäre bei umgekehrter Reihenfolge der Zuordnung  $T_2$  vom Typ 3 bzw. 4 und  $T_2$  vom Typ 5 bzw. 6.
- 3.) Ist  $T_1$  vom Typ 6, so kann  $T_2$  höchstensfalls vom Typ 5 sein.

Ist  $T$  vom Typ 3, so folgt aus  $z_i \in T$ , dass  $p^{[T]} \neq 0$ . Mit der  $C^1$ -Stetigkeit über den Kanten von  $T$  gilt  $p^{[T_{1,j}]} \neq 0$  für alle benachbarten Dreiecke  $T_{1,j}$  von  $T$  vom Typ  $\geq 4$ . Ist  $T_{1,j}$  ein Dreieck vom Typ 4, so gilt wiederum  $p^{[T_{2,k}]} \neq 0$  für alle benachbarten Dreiecke  $T_{2,k}$  von  $T_{1,j}$  von höherem Typ. Ist  $T_{2,k}$  ein Dreieck vom Typ 5, so gilt  $p^{[T_{3,k}]} \neq 0$  für das eventuell existierende benachbarte Dreieck  $T_{3,k}$  von  $T_{2,k}$  vom Typ 6. Auf allen anderen Dreiecken  $T \in \Delta$  gilt  $p^{[T]} \equiv 0$  (vgl. Abbildung 34). Analoges gilt, falls  $T$  vom Typ  $\geq 4$  ist. Dies impliziert für einen Eckpunkt  $v$  von  $T$

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^3(v).$$

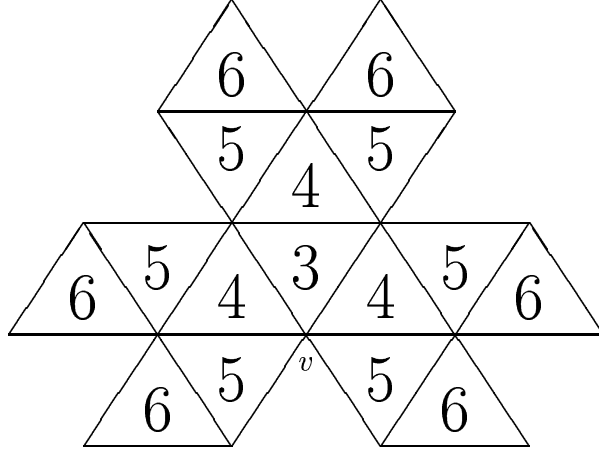


Abb. 34: Dreiecksketten in Theorem 5.5, Fall 1.

**Fall 2:**  $z_i \in \mathcal{L}_0^{(q)} \cup \mathcal{L}_7^{(q)}$ ;

Sei  $z_i \in T$ , dann ist  $p^{[T]} \neq 0$  und es kann  $D^w p^{[T]}(v_1) \neq 0$ ,  $w = 0, 1$ , für einen Eckpunkt  $v_1$  von  $T$  gelten.

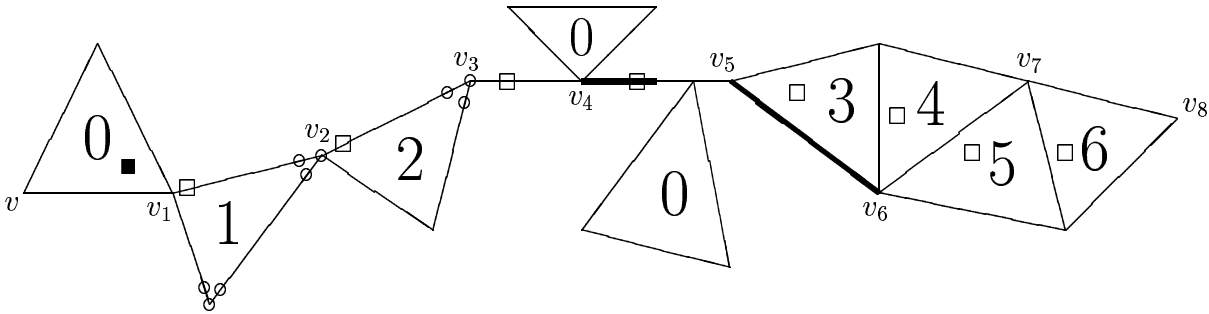
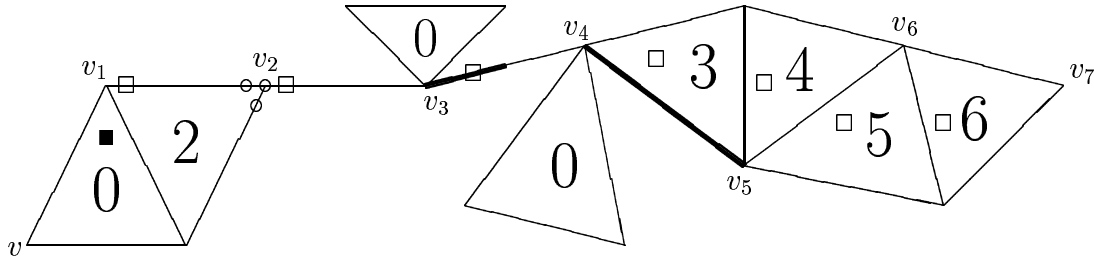


Abb. 35: Punkte in Fall 2.1: ■  $z_i$ , ○ Null interpoliert, □ evtl. ungleich Null berechnet.

**Fall 2.1:** Ein berührendes Dreieck  $T_1$  von  $T$  ist vom Typ 1 (vgl. Abbildung 35);

Für einen Eckpunkt  $v_2$  von  $T_1$  ist  $s_{|e_{1,2}} \neq 0$  möglich. Nach Konstruktion gibt es kein weiteres Dreieck vom Typ 1, jedoch eventuell ein Dreieck  $T_2$  vom Typ 2, das  $T_1$  berührt. In diesem



$$\text{supp}(s_i) \subset st^8(v).$$
$$\text{supp}(s_i) \subset st^7(v).$$


**Fall 3:**  $z_i \in \mathcal{L}_1^{(q)} \cup \mathcal{L}_2^{(q)}$ ;

$$\text{supp}(s_i) \subset st^{8-j}(v)$$

#

- Abbildung 37 zeigt ein Beispiel, in dem ein Punkt in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  für den Eckpunkt eines Dreiecks  $T = \Delta(w, v_3, v_4)$  des Typs 2 außerhalb von  $T$  gewählt wird. Es wird kein Interpolationspunkt  $\star$  ins Innere von  $[v_3, v_4]$  gelegt, da diese Kante ein Pfad ist. Der statt dessen gewählte Interpolationspunkt im Innern von  $[v_4, v_5]$  impliziert hier  $D^w p^{[T]}(v_4) \equiv 0$ ,  $w = 0, 1$ , für den Fundamentalspline  $s_i$ .
- Bei der Berechnung des interpolierenden Splines  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$  spielen die Fundamentalsplines keine Rolle, da  $s$  durch schrittweise Lösung kleiner Gleichungssysteme bestimmt wird. Aus  $\text{supp}(s_i) \subset st^8(v)$  folgt auch nicht, dass  $s_i$  auf allen Dreiecken von  $st^8(v)$  verschieden von Null ist. Vielmehr ist es so, dass  $s_i$  nur auf kleinen Bereichen von  $st^8(v)$ , so z.B. kurze Ketten von Dreiecken, Werte ungleich Null annimmt.

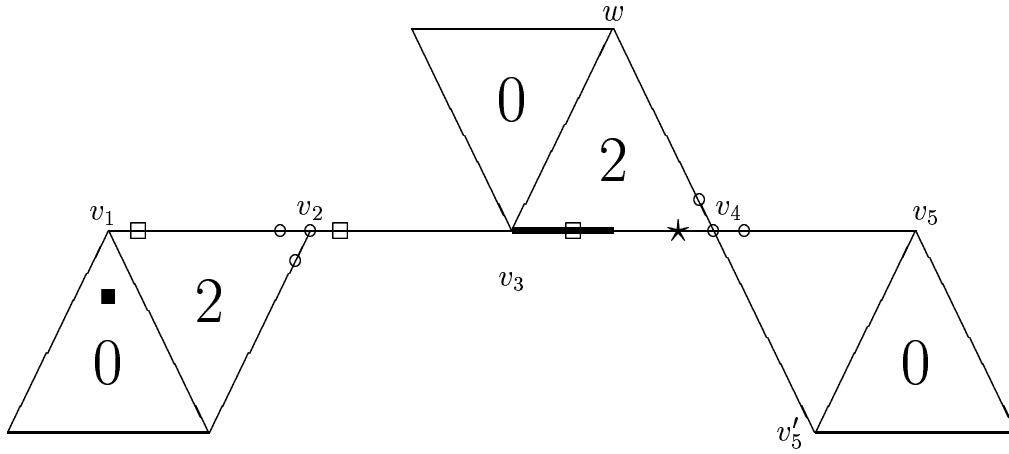


Abb. 37: ■  $z_i$ , ○ Null, □ evtl. ungleich Null, ★ nicht gewählter Punkte in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$ .

### 5.3 Approximationsordnung der Interpolation

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Approximationsordnung der in Paragraph 5.2 beschriebenen Lagrange-Interpolationsmethode mit  $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ ,  $q \geq 5$ , auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ . Dazu verwenden wir die von Nürnberger [107] (siehe auch Nürnberger und Walz [110], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] und Nürnberger und Zeilfelder [118]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation. Sei  $\alpha$  der kleinste Winkel in  $\Delta$ . Wir betrachten nun einerseits die Summe der beiden anliegenden Winkel, für jeden Pfad, und andererseits den zwischen den Kanten  $e_{i,1}$  und  $e_{i,2}$  eingeschlossenen Winkel, für jeden unmarkierten Knoten der Dreiecke vom Typ 2. Den am nächsten an  $\pi$  liegenden Winkel davon bezeichnen wir mit  $\beta$ . Wir zeigen zunächst für beliebiges  $q \geq 5$  Abschätzungen des Interpolationsfehlers im  $C^1$ - bzw.  $C^2$ -Bereich der Knoten sowie auf den Kanten der Triangulierung. In der zentralen Aussage beweisen wir anschließend die Optimalität der Approximationsordnung des Interpolationsverfahrens.

Sei  $q \geq 5$ ,  $f \in C^{q+1}(\Omega)$ ,  $h = |\Delta|$  und  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle Dreiecke  $T \in \Delta$ , die eindeutige Interpolationsfunktion an  $f$  bzgl.  $\mathcal{L}^{(q)}$ . Ferner sei  $v \in V(\Delta)$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_i = [v, v_i]$ ,  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$  und  $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten ent falle das Dreieck  $T_n$ .

**Lemma 5.7:**

Existieren für zwei linear unabhängige Einheitsvektoren  $d_i, d_j$  zwei (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i, C_j > 0$ , so dass

$$|(f - s)_{d_i}(v)| \leq C_i \cdot h^q \quad \text{und} \quad |(f - s)_{d_j}(v)| \leq C_j \cdot h^q,$$

so gibt es eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit

$$\|D^1(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^q.$$

**Beweis:**

Es gelte o.B.d.A.  $i = 1$ . Für  $1 < k < j$  bezeichne  $\alpha_1$  den von  $e_1$  und  $e_k$ , sowie  $\alpha_k$  den von  $e_k$  und  $e_j$  eingeschlossenen Winkel. (Der Fall  $1 < j < k$  wird analog bewiesen.)

Dann gilt  $\sin(\alpha_1 + \alpha_k)e_k = \sin(\alpha_k)e_1 + \sin(\alpha_1)e_j$  für  $k = 2, \dots, n$ ,  $k \neq j$ , und damit

$$\begin{aligned} |(f - s)_{d_k}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_j}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_j \cdot h^q + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_1 \cdot h^q \leq C_k \cdot h^q, \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $K = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| (C_1 + C_j) > 0$ , die unabhängig von  $k$  ist. Es folgt die Behauptung.

#

**Lemma 5.8:**

Existieren (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass

$$\left| (f - p^{[T_i]})_{d_i^2}(v) \right| \leq C_i \cdot h^{q-1},$$

(für jeden Knoten  $v \in V_{in}$  entfalle die Ungleichung für  $i = n$ ), sowie eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_{1,2} > 0$ , für die gilt:

$$\left| (f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v) \right| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1},$$

so gibt es eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$  mit

$$\|D^2(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^{q-1}.$$

**Beweis:**

Sei  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$  der von  $e_i$  und  $e_{i+1}$ ,  $e_{n+1} = e_1$ , eingeschlossene Winkel. Dann betrachten wir drei Fälle. Die Konstante  $K$  ergibt sich als Maximum aller auftretenden Konstanten.

**Fall 1:**  $v \in V_{in}$ ;

Falls  $e_2$  in  $v$  degeneriert ist, so folgt

$$\left| (f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v) \right| = \left| -(f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1}.$$

Andernfalls folgt aus  $\sin(\alpha_1)e_3 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)e_2 - \sin(\alpha_2)e_1$ , dass

$$\begin{aligned} \left| (f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v) \right| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2^2}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_2 \cdot h^{q-1} + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_{1,2} \cdot h^{q-1} \leq C_{2,3} \cdot h^{q-1} \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $q$ ,  $f$  und  $\alpha$  abhängigen) Konstanten  $C_{2,3} = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| (C_2 + C_{1,2}) > 0$ .

Mit analogem Argument existieren für  $i = 3, \dots, n - 1$  (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_{i,i+1} > 0$ , so dass

$$\left| (f - p^{[T_i]})_{d_i d_{i+1}}(v) \right| \leq C_{i,i+1} \cdot h^{q-1}.$$

Schließlich gilt  $\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)e_n = \sin(\alpha_n)e_{n-1} + \sin(\alpha_{n-1})e_1$ , und damit

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_n]})_{d_{n-1}d_n}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_nd_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n-1,n} \cdot h^{q-1} + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n,1} \cdot h^{q-1} \leq C_n \cdot h^{q-1} \end{aligned}$$

für eine (von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_n = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| (C_{n-1,n} + C_{n,1}) > 0$ .

**Fall 2:**  $v \in V_I(\Delta)$  ist singulär;

Da alle Kanten  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , im Knoten  $v$  degeneriert sind, folgt

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2d_3}(v)| &= |-(f - p^{[T_3]})_{d_3d_4}(v)| = |(f - p^{[T_4]})_{d_4d_1}(v)| \\ &= |-(f - p^{[T_1]})_{d_1d_2}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1}. \end{aligned}$$

**Fall 3:**  $v \in V_B(\Delta)$ ;

Analog Fall 1 folgt für  $i = 2, \dots, n-1$  die Existenz (nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängiger) Konstanten  $C_{i,i+1} > 0$ , so dass

$$|(f - p^{[T_i]})_{d_id_{i+1}}(v)| \leq C_{i,i+1} \cdot h^{q-1}.$$

#

Wir betrachten nun die Approximationsordnung univariater Lagrange-Interpolation. Sei  $q \geq 5$ ,  $e = [u, v]$  eine Kante der Länge  $h$  und  $f \in C^{q+1}(e)$ . Für  $m \in \{2, \dots, q+1\}$  seien  $z_1 = u$ ,  $z_2 = v$  und  $z_3, \dots, z_m$ , falls  $m \geq 3$ , auf  $e$  gewählte Interpolationspunkte,  $d_1$  bzw.  $d_2$  ein Einheitsvektor von  $u$  nach  $v$  bzw. von  $v$  nach  $u$ , sowie  $l_1, l_2 \in \{0, \dots, 2\}$ , derart dass  $m + l_1 + l_2 = q + 1$ . Ferner sei  $p \in \Pi_q$  das eindeutige Interpolationspolynom an  $f$  bzgl. der Menge  $\{z_i, i = 1, \dots, m\}$ .

**Lemma 5.9:**

Existieren zwei (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , so dass

$$\left| (f - p)_{d_1^{k_1}}(u) \right| \leq C_1 \cdot h^{q+1-k_1} \quad \text{und} \quad \left| (f - p)_{d_2^{k_2}}(v) \right| \leq C_2 \cdot h^{q+1-k_2}$$

für  $k_i = 0, \dots, l_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gibt es eine Konstante  $K_e > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  und  $i = 1, 2$  gilt:

$$\|(f - p)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

**Beweis:**

Da  $p \in \mathcal{P}_q$  die gegebene Funktion  $f$  interpoliert, gilt

$$(f - p)(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Mit den gegebenen Ungleichungen in  $u$  und  $v$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.15 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt. Es gibt also eine Konstante  $K_e > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  und  $i = 1, 2$  gilt:

$$\|(f - p)_{d_i^w}\| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

#

Wir formulieren nun die zentrale Aussage über die Approximationsordnung der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Methode zur Lagrange-Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad  $\geq 5$  auf beliebigen Triangulierungen.

**Theorem 5.10:**

Sei  $q \geq 5$ ,  $f \in C^{q+1}(\Omega)$  und  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$  die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems bzgl.  $\mathcal{L}^{(q)}$ . Dann existiert eine Konstante  $K > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)\| \leq K \cdot h^{q+1-w}.$$

**Beweis:**

Wir zeigen, dass auf jedem Dreieck  $T \in \Delta$  für die Interpolationsfunktion  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt sind. Da die Interpolation lokal ist, müssen nur endlich viele Dreiecke in der Umgebung von  $T$ , und daher nur endlich viele Fälle betrachtet werden. Letztlich ergibt sich die Konstante  $K$  unabhängig von  $h$  als das Maximum aller in den verschiedenen Fällen auftretenden Konstanten. Im Folgenden sei  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $e_i = [v_i, v_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $v_4 = v_1$ , sowie  $d_i$  für  $i = 1, \dots, 3$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$ . Dann betrachten wir fünf Fälle:

**Fall 1:**  $T$  ist vom Typ 0;

Sei  $\mathcal{L}_T^{(q)}$  die Menge der Interpolationspunkte von  $\mathcal{L}^{(q)}$  auf  $T$ . Dann gilt

$$(f - s)|_T(z) = 0, \quad z \in \mathcal{L}_T^{(q)}.$$

Nach Lemma 2.14, mit  $\sigma = q + 1$ , gibt es daher eine Konstante  $K_0 > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$  und  $\alpha$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_0 \cdot h^{q+1-w}.$$

**Fall 2:**  $T$  ist vom Typ 1;

Sei  $v_1$  der Eckpunkt eines Typ 0 Dreiecks. Nach Lemma 5.9 gibt es Konstanten  $K_{e_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass

$$\|((f - s)|_{e_i})_{d_i^w}\| \leq K_{e_i} \cdot h^{q+1-w},$$

für  $w \in \{0, \dots, q\}$ . Im Knoten  $v_1$  folgt nach Lemma 5.7 und Lemma 5.8 für  $w = 0, \dots, 2$ :

$$|D^w(f - p^{[T]})(v_1)| \leq C_2 \cdot h^{q+1-w},$$

für eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_2$ . Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}^{(q)}$  auf dem Dreieck  $T$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt. Es gibt somit eine Konstante  $K_1 > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_1 \cdot h^{q+1-w}.$$

**Fall 3:**  $T$  ist vom Typ 2, Fall a)  $\tilde{T} = \Delta(v_1, v_2, w) \in \Delta$  ist vom Typ  $\leq 2$ ;

Nach Lemma 5.9 gibt es Konstanten  $K_{e_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass

$$\|((f - s)|_{e_i})_{d_i^w}\| \leq K_{e_i} \cdot h^{q+1-w},$$

für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$ . Sei  $e_{i,j} = [v_i, v_j]$ ,  $d_{i,j}$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_i, v_j]$  und  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , der von  $[v_1, v_0]$  und  $[v_1, v_2]$  bzw. der von  $[v_1, v_2]$  und  $[v_1, v_3]$  eingeschlossene Winkel. Aus  $\sin(\alpha_1)e_{1,3} = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)e_{1,2} - \sin(\alpha_2)e_{1,0}$  folgt dann für  $l = 0, \dots, q-1$ , da  $\tilde{T}$  ein Dreieck wie in Fall 1 oder Fall 2 ist, dass

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T]})_{d_{1,2}^l d_{1,3}}(v_1)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T]})_{d_{1,2}^{l+1}}(v_1) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T]})_{d_{1,2}^l d_{1,0}}(v_1) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} K_{e_{1,2}} \cdot h^{q-l} \right| + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} K_{0,1} \cdot h^{q-l} \right| \leq C_2 \cdot h^{q-l} \end{aligned}$$

mit einer (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängigen) Konstanten  $C_2 = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| (K_{e_{1,2}} + K_{0,1}) > 0$ . Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}^{(q)}$  auf  $T$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt. Es gibt also eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K_2 > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_2 \cdot h^{q+1-w}.$$

**Fall 4:**  $T$  ist vom Typ 2; Fall b);

Seien  $v_1$  und  $v_2$  die Eckpunkte von Dreiecken des Typs  $\leq 1$ . Nach Lemma 2.14 gibt es Konstanten  $K_{e_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|((f - s)|_{e_i})_{d_i^w}\| \leq K_{e_i} \cdot h^{q+1-w}.$$

Für die Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , gibt es nach Lemma 5.8 Konstanten  $C_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass

$$\|D^2(f - p^{[T]})(v_i)\| \leq C_i \cdot h^{q-1}.$$

Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}^{(q)}$  auf  $T$  sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt. Somit gibt es eine Konstante  $K_3 > 0$  (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_3 \cdot h^{q+1-w}.$$

**Fall 5:**  $T$  ist vom Typ  $\geq 3$ ;

Nach Lemma 5.9 gibt es Konstanten  $K_{e_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , (nur abhängig von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ ), so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|((f - s)|_{e_i})_{d_i^w}\| \leq K_{e_i} \cdot h^{q+1-w}.$$

Sei  $e$  jetzt eine Kante von  $T$ , gemeinsam mit einem benachbarten Dreieck niedrigeren Typs. Dann gibt es wie in Fall 3 eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $C_e$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  und alle  $l = 0, \dots, q - 1$

$$|(f - p^{[T]})_{d^l \tilde{d}}(v)| \leq C_e \cdot h^{q-l}$$

gilt, wobei  $d$  bzw.  $\tilde{d}$  ein Einheitsvektor entlang bzw. linear unabhängig zu  $e$  ist. Mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}^{(q)}$  auf  $T$  sind somit die Voraussetzungen von Lemma 2.14 mit  $\sigma = q + 1$  erfüllt. Es gibt daher eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K_4 > 0$ , so dass für alle  $w \in \{0, \dots, q\}$  gilt:

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_4 \cdot h^{q+1-w}.$$

#

**Korollar 5.11:**

Sei  $q \geq 5$ . Dann gibt es für jede Funktion  $f \in C^{q+1}(\Omega)$  eine (nur von  $q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  abhängige) Konstante  $K > 0$ , so dass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^1(\Delta)) \leq K \cdot h^{q+1}.$$

**Bemerkung 5.12:**

Es ist bekannt, dass fast-degenerierte Kanten und fast-singuläre Knoten bei der Berechnung des Interpolanten zu numerischen Instabilitäten führen können (vgl. Lai und Schumaker [93]). Solche Konstellationen werden hier durch den Winkel  $\beta$  beschrieben. In Anwendungsbereichen werden daher für  $\beta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$  und kleines  $\epsilon > 0$  die entsprechenden Kanten als kolinear interpretiert und dann die markierten Kanten bzw. Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  und  $\mathcal{L}_7^{(q)}$  anders gelegt.





## Kapitel 6:

# Hermite-Interpolation mit $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ auf Klassen von Triangulierungen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit  $C^2$ -Splines vom Grad 7. In der derzeitigen Literatur über bivariate Splines existiert kein Verfahren zur Interpolation mit  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf beliebigen Triangulierungen. Selbst die Bestimmung der Dimension dieser Splineräume ist ein bisher ungelöstes Problem. Aus der Finite-Elemente Theorie sind zahlreiche Verfahren zur Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen für  $C^2$ -Splines niedrigen Grades auf Triangulierungen bekannt, in denen jedes Dreieck geeignet unterteilt wird (vgl. [88,89,92,124,142]). Bei der Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad  $< 8$ , ohne Verfeinerung der zu Grunde liegenden Triangulierung, wurden bisher lediglich Klassen von Triangulierungen untersucht. So gaben beispielsweise Nürnberger und Riessinger [105] auf den regelmäßigen Rechteckstriangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  (vgl. Abbildung 40) für beliebiges  $q$  und  $r$  Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^r(\Delta^i)$ ,  $i = 1, 2$ , an. Alfeld und Schumaker [6] untersuchten nichtdegenerierte Triangulierungen  $\Delta$ , d.h. Triangulierungen, in denen weder degenerierte Kanten noch singuläre Knoten auftreten (vgl. Abbildung 2), und gaben Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_{3r+1}^r(\Delta)$ ,  $r \geq 2$ , an. Auf einer Klasse von induktiv konstruierten Triangulierungen bestimmten Nürnberger und Zeilfelder [112,113] Mengen zur Lagrange- und Hermite-Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad  $\geq 5$ . Darüber hinaus zeigten sie, dass diese Interpolationsmethode auch auf unregelmäßige  $\Delta^2$ -Triangulierungen angewandt werden kann.

Wir entwickeln in diesem Kapitel das erste Verfahren zur Hermite-Interpolation mit  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf allgemeinen Klassen von Triangulierungen, die sowohl degenerierte Kanten als auch singuläre Knoten enthalten können, wobei keine Dreiecke unterteilt werden. Diese in Abschnitt 6.1 beschriebenen Triangulierungen sind dadurch charakterisiert, dass für jeden inneren, nichtsingulären Knoten nichtzyklische Pfade zu Randknoten oder singulären Knoten existieren (vgl. Abbildungen 40 und 41). Pfade sind dabei Mengen von aufeinanderfolgenden, im Anfangspunkt nichtdegenerierten Kanten. Mithilfe von Bézier-Bernstein-Techniken bestimmen wir in Abschnitt 6.2 die Dimension der Splineräume  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  für solche  $\Delta$ , wobei wir zuerst einzelne Zellen der Triangulierung betrachten und diese dann unter Verwendung der Pfade durchlaufen. Darauf aufbauend wählen wir in Abschnitt 6.3 geeignete Interpolationsbedingungen in den Knoten der Triangulierung zur eindeutigen Hermite-Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad 7. Im letzten Abschnitt erläutern wir einen zweistufigen Algorithmus, der aus einer nicht in obiger Klasse enthaltenen Triangulierung durch wenige Clough-Tochter-Splits eine für diese Interpolationsmethode geeignete Triangulierung erzeugt.

## 6.1 Beschreibung der Klasse $\mathcal{T}$

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Klasse  $\mathcal{T}$  der für diese Interpolationsmethode geeigneten Triangulierungen, die durch die Existenz geeigneter Pfade für jeden inneren, nichtsingulären Knoten charakterisiert sind. Dazu verwenden wir einen Algorithmus, der für eine vorgegebene Triangulierung  $\Delta$  für die inneren Knoten geeignete Pfade festlegt und entscheidet, ob  $\Delta \in \mathcal{T}$  oder  $\Delta \notin \mathcal{T}$ . Diese Pfade definieren insbesondere eine Reihenfolge der inneren, nichtsingulären Knoten der Triangulierung.

Sei  $\mathcal{M}(\Delta)$  die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte der Triangulierung  $\Delta$ , dann unterteilen wir zur Vereinfachung diese Menge in drei Bereiche (vgl. Abbildung 38):

- 1.) Die  $D_2$ -Scheibe  $D_2(v)$  für alle Knoten  $v$  der Triangulierung (mit  $\circ$  markiert),
- 2.)  $R_{3,4}(v, u) := (R_3(v) \cup R_4(v)) \cap (R_3(u) \cup R_4(u))$  für alle  $v, u \in V(\Delta)$ , die durch eine Kante verbunden sind (mit  $\triangle$  markiert), und
- 3.)  $R_{3,4}(v, T) := \{P_{4,1,2}^{[T]}, P_{4,2,1}^{[T]}, P_{3,2,2}^{[T]}\}$  für alle  $v \in V(\Delta)$  und alle Dreiecke  $T$  mit Eckpunkt  $v$  (mit  $\square$  markiert).

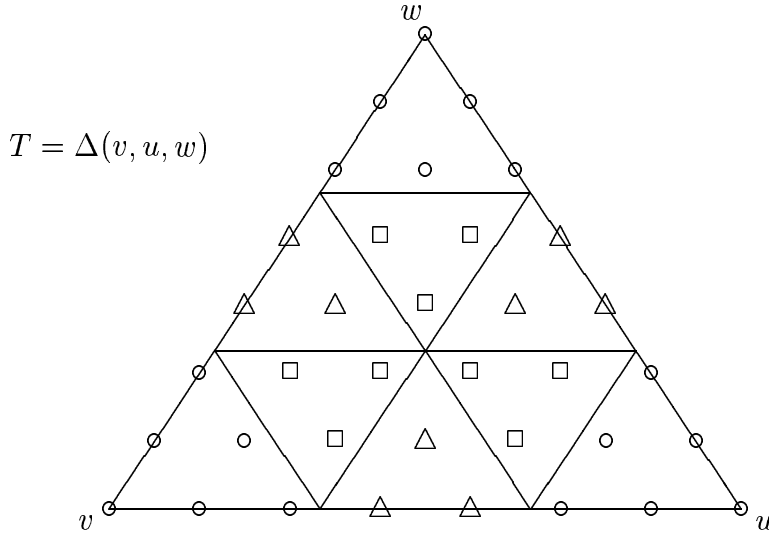


Abb. 38: Bézier-Bernstein-Punkte eines Dreiecks  $T$ .

### Bemerkung 6.1:

Für die oben definierten Teilmengen von Bézier-Bernstein-Punkten der Triangulierung gilt

$$D_4(v) = D_2(v) \cup \left( \bigcup_{u \in V(\Delta)} R_{3,4}(v, u) \right) \cup \left( \bigcup_{T \in \Delta} R_{3,4}(v, T) \right)$$

und

$$\mathcal{M}(\Delta) = \bigcup_{v \in V(\Delta)} D_4(v).$$

Nach Schumaker [131] existiert eine untere Schranke für die Dimension von  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ . Es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)) \geq lb_7^2(\Delta) = 15\#E_I(\Delta) - 30\#V_I(\Delta) + 36 + \sigma(\Delta),$$

wobei  $\sigma(\Delta)$  von der exakten Lage der Knoten der Triangulierung abhängt.

**Definition 6.2:**

Für einen Knoten  $v \in V_I(\Delta)$  sei  $e$  die Anzahl der Kanten der Triangulierung mit Endpunkt  $v$ , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Dann heißt  $v$  SINGULÄR, falls  $e = 2$ , DEFEKT, falls  $e = 3$ , und NORMAL, falls  $e \geq 4$  (vgl. Abbildung 39).

Damit lässt sich  $\sigma(\Delta)$  schreiben als  $\sigma(\Delta) = \sum_{i=1}^{\#V_I(\Delta)} \sigma_i$ , wobei

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^5 (3 + j - j e_i)_+ = \begin{cases} 3, & \text{falls } v_i \text{ ein singulärer Knoten,} \\ 1, & \text{falls } v_i \text{ ein defekter Knoten, oder} \\ 0, & \text{falls } v_i \text{ ein normaler Knoten ist.} \end{cases}$$

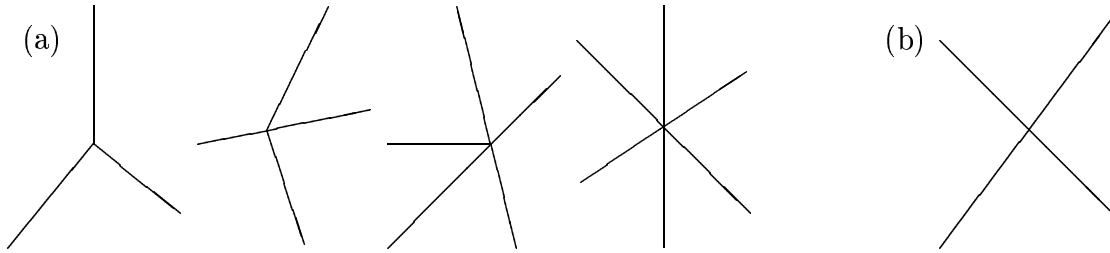


Abb. 39: (a) defekte Knoten vom Grad 3, 4, 5 und 6, (b) singulärer Knoten.

Wir legen nun die Klasse  $\mathcal{T}$  von Triangulierungen  $\Delta$  fest, auf denen wir mit  $C^2$ -Splines vom Grad 7 interpolieren. Sei dazu  $V_{in} := \{v \in V_I(\Delta) \mid v \text{ ist nichtsingulär}\} = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $V_{ok} := V(\Delta) \setminus V_{in} = \{v_{n+1}, \dots, v_{\#V(\Delta)}\}$ . Ferner seien alle Knoten in  $V_{in}$  unmarkiert.

**Algorithmus 6.3:**

Für  $k = n, \dots, 1$  wähle einen unmarkierten Knoten  $v_k \in V_{in}$ , für den eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $v_k$  ist ein normaler Knoten, es existieren vier aufeinanderfolgende Kanten  $a_1, \dots, a_4$  mit Endpunkt  $v_k$ , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen, so dass  $a_2$  und  $a_3$  zu Knoten verlaufen, die in  $V_{ok}$  liegen oder markiert sind.
- (ii)  $v_k$  ist ein defekter Knoten, es gibt eine in  $v_k$  nichtdegenerierte Kante  $a$ , die zu einem Knoten verläuft, der in  $V_{ok}$  liegt oder markiert ist.

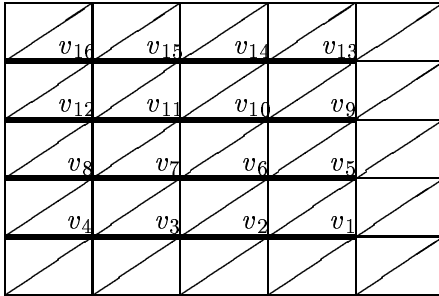
Markiere den Knoten  $v_k$ , die Kante  $a_2$  bzw.  $a$  als einfachen Pfad und die Kante  $a_3$  als zweifachen Pfad.

Endet Algorithmus 6.3 letztlich mit der Markierung von  $v_1$ , so gilt  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Verbleiben jedoch unmarkierte Knoten in  $V_{in}$ , die weder Bedingung (i) noch (ii) erfüllen, so gilt  $\Delta \notin \mathcal{T}$ .

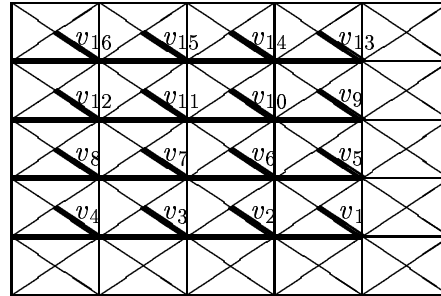
**Bemerkung 6.4:**

Durch Algorithmus 6.3 wird insbesondere eine Reihenfolge der Knoten in  $V_{in}$  festgelegt. Wesentlich ist dabei, dass  $i < j$  für zwei Knoten  $v_i, v_j \in V_{in}$  gilt, falls  $v_j$  auf dem Pfad zwischen  $v_i$  und dem Randknoten oder singulären Knoten dieses Pfads liegt, d.h. in diesem Fall wird erst  $v_i$  und später  $v_j$  betrachtet.

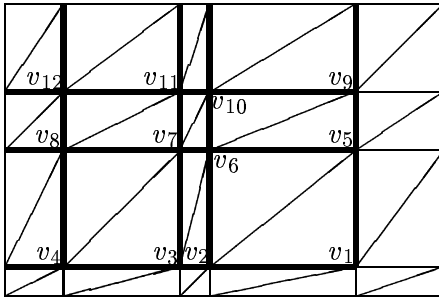
a) regelmäßige  $\Delta^1$ -Triangulierung



b) regelmäßige  $\Delta^2$ -Triangulierung



c) unregelmäßige  $\Delta^1$ -Triangulierung



d) unregelmäßige  $\Delta^2$ -Triangulierung

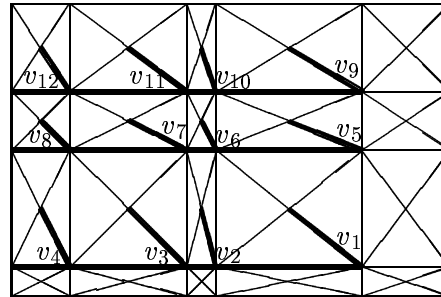
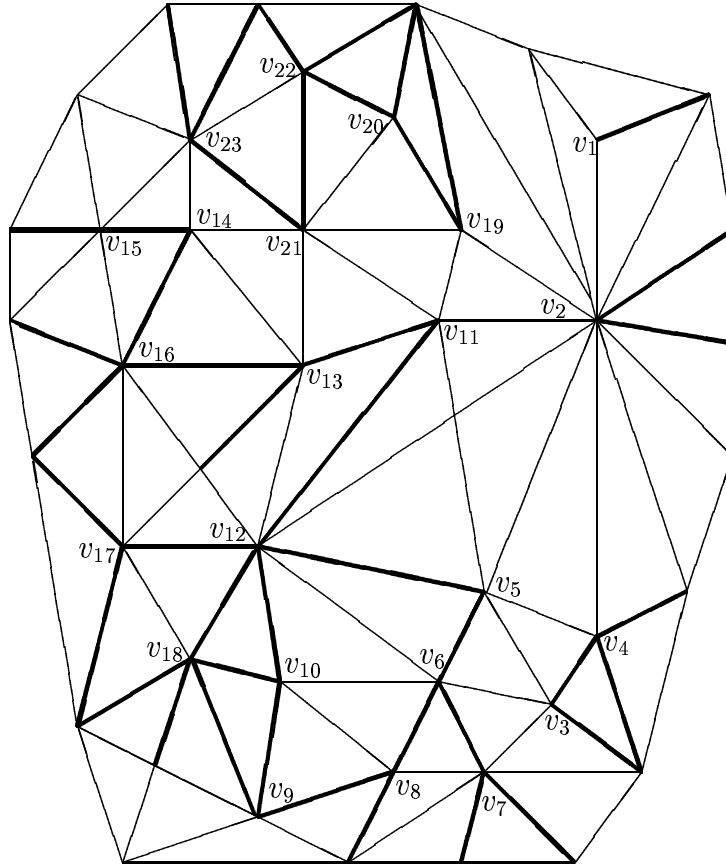
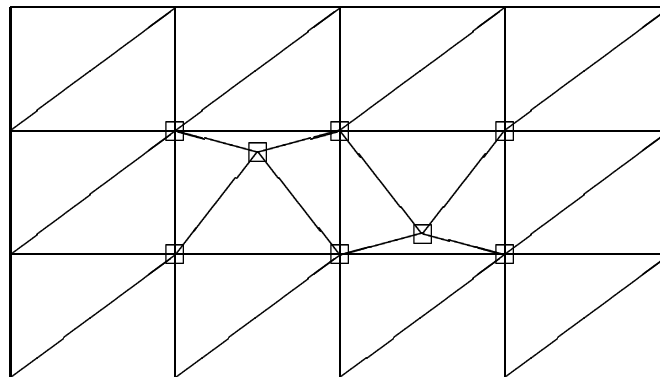


Abb. 40: Reihenfolge der Knoten in  $V_{in}$  mit dazugehörigen Pfaden.

**Beispiele 6.5:**

- Eine mögliche Reihenfolge der Knoten in  $V_{in}$  mit dazugehörigen Pfaden für die Triangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  ist in Abbildung 40 zu sehen. Die Methode von Alfeld und Schumaker [6] zur Bestimmung der Dimension von  $\mathcal{S}_7^2(\Delta^2)$  kann nicht angewandt werden, da singuläre Knoten und degenerierte Kanten auftreten.
- Eine Triangulierung, bei der bei jedem Knoten alle anliegenden Kanten paarweise verschiedene Steigungen besitzen, liegt in  $\mathcal{T}$ , denn für jeden normalen Knoten können zwei beliebige, aufeinanderfolgende Kanten, und für jeden defekten Knoten kann eine beliebige Kante als Pfad gewählt werden.
- Für eine exemplarische Triangulierung zeigt Abbildung 41 eine mögliche Reihenfolge Knoten von  $V_{in}$ . Die in Algorithmus 6.3 festgelegten Pfade sind dick markiert.

- Abbildung 42 zeigt eine Triangulierung, die nicht in  $\mathcal{T}$  liegt. Für keinen der inneren Knoten (mit  $\square$  markiert), die alle normal sind, gibt es vier aufeinanderfolgenden Kanten paarweise verschiedener Steigung, von denen die mittleren beiden zu einem Randknoten oder singulären Knoten verlaufen.

Abb. 41: Knoten in  $V_{in}$  mit Pfaden für  $\Delta$  exemplarisch.Abb. 42: Beispiel einer Triangulierung  $\Delta \notin \mathcal{T}$ .

## 6.2 Bestimmung der Dimension

Im Folgenden bestimmen wir für  $\Delta \in \mathcal{T}$  die Dimension des Splineraums  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ . Zunächst untersuchen wir einzelne Zellen  $\Delta_v \subset \Delta$ ,  $v \in V(\Delta)$ , und wählen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten  $\mathcal{M}_v \subset \mathcal{M}(\Delta_v)$ , die  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf  $D_4(v)$  bestimmen. Dabei unterscheiden wir, ob  $v$  ein singulärer Knoten, defekter Knoten, normaler Knoten oder ein Randknoten ist. Anschließend durchlaufen wir unter Verwendung der definierten Pfade die Knoten der Triangulierung und konstruieren eine minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}$  für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ .

Sei  $v \in V(\Delta)$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_i := [v, v_i]$ . Ferner sei  $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle um  $v$ . Für einen Randknoten ent falle das Dreieck  $T_n$ .

**Fall 1:**  $v$  ist ein normaler Knoten;

Dann gibt es nach Algorithmus 6.3 vier aufeinanderfolgende Kanten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , in  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Für  $\mathcal{M}_v$  wähle folgende Bézier-Bernstein-Punkte (vgl. Abbildung 43, links):

- (i) 6 Punkte in  $D_2(v)$ , die  $D_2(v)$  bestimmen,
- (ii) 3 Punkte in  $R_{3,4}(v, v_i)$ , die  $R_{3,4}(v, v_i)$  bestimmen, für jede Kante  $e_i \notin \{a_2, a_3\}$ ,
- (iii) die Punkte  $P_{3,4,0}^{[T_i]}, P_{3,3,1}^{[T_i]} \in R_{3,4}(v, v_i)$ , für  $e_i = a_3$ ,
- (iv) den Punkt  $P_{3,4,0}^{[T_i]}$ , für  $e_i = a_2$ , und
- (v)  $R_{3,4}(v, T_i)$  für ein Dreieck  $T_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , das nicht von  $a_2$  und  $a_3$  begrenzt wird.

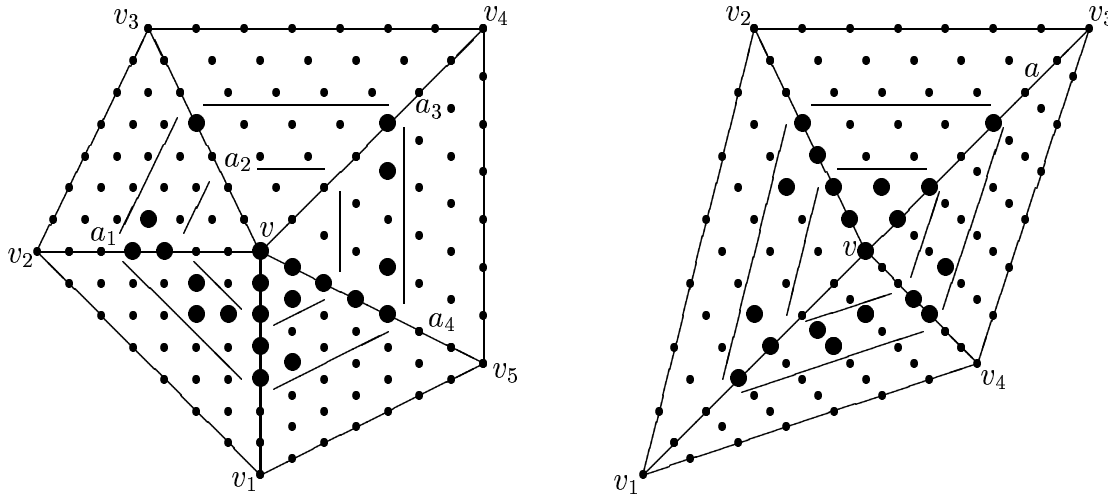


Abb. 43:  $\mathcal{M}_v$  für  $v$  normal (links) und  $v$  defekt (rechts).

**Fall 2:**  $v$  ist ein defekter Knoten;

Dann gibt es nach Algorithmus 6.3 eine Kante  $a \in \{e_i, i = 1, \dots, n\}$ , die nicht im Knoten  $v$  degeneriert ist. Für  $\mathcal{M}_v$  wähle (vgl. Abbildung 43, rechts):

- (i) 6 Punkte in  $D_2(v)$ , die  $D_2(v)$  bestimmen,
- (ii) 3 Punkte in  $R_{3,4}(v, v_i)$ , die  $R_{3,4}(v, v_i)$  bestimmen, für jede Kante  $e_i \neq a$ ,
- (iii) den Punkt  $P_{3,4,0}^{[T_i]}$  für die Kante  $e_i = a$ , und
- (iv)  $R_{3,4}(v, T_i)$  für ein beliebiges Dreieck  $T_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Fall 3:**  $v$  ist ein singulärer Knoten;

Dann gilt  $\text{Grad}(v) = 4$ , und wir wählen für  $\mathcal{M}_v$  (vgl. Abbildung 44, links):

- (i) 6 Punkte in  $D_2(v)$ , die  $D_2(v)$  bestimmen,
- (ii) 3 Punkte in  $R_{3,4}(v, v_i)$ , die  $R_{3,4}(v, v_i)$  bestimmen, für jede Kante  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , und
- (iii)  $R_{3,4}(v, T_i)$  für ein beliebiges Dreieck  $T_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

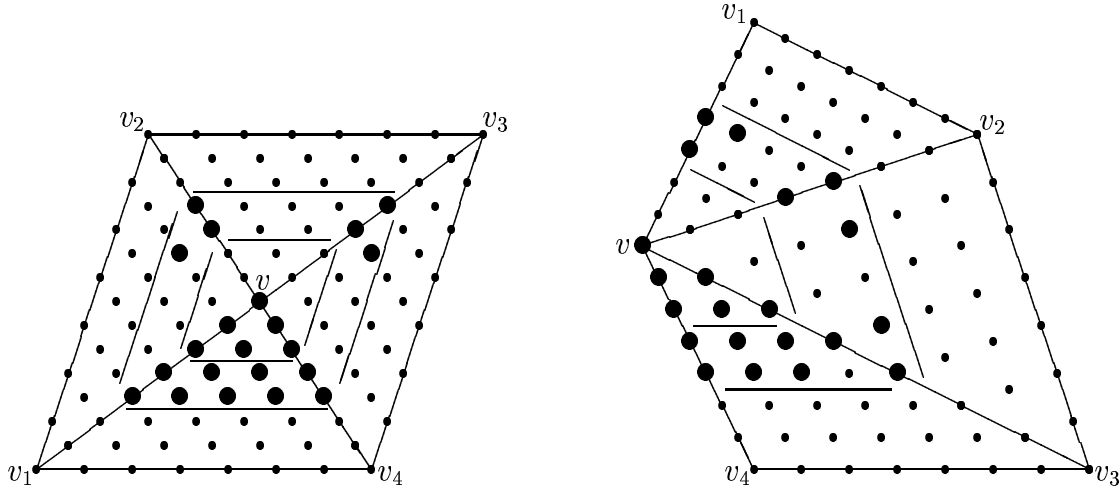


Abb. 44:  $\mathcal{M}_v$  für  $v$  singulär (links) und  $v$  ein Randknoten (rechts).

**Fall 4:**  $v$  ist ein Randknoten;

Dann bestehe  $\mathcal{M}_v$  aus folgenden Punkten (vgl. Abbildung 44, rechts):

- (i) 6 Punkte in  $D_2(v)$ , die  $D_2(v)$  bestimmen,
- (ii) 3 Punkte in  $R_{3,4}(v, v_i)$ , die  $R_{3,4}(v, v_i)$  bestimmen, für jede Kante  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und
- (iii)  $R_{3,4}(v, T_i)$  für ein beliebiges Dreieck  $T_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Lemma 6.6:**

Sei  $\mathcal{M}_v$ ,  $v \in V(\Delta)$ , wie oben. Dann ist  $\mathcal{M}_v$  eine bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta_v)$  auf  $D_4(v)$ .

**Beweis:**

Für alle  $(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3$ ,  $i + j + k = 7$ , und alle  $T \in \Delta$  sei  $a_{i,j,k}^{[T]}$  der zu  $P_{i,j,k}^{[T]}$  gehörende

Bézier-Bernstein-Koeffizient. Wir zeigen, dass das homogene Problem  $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$  für alle  $P_{i,j,k}^{[T]}$  in  $\mathcal{M}_v$  nur trivial lösbar ist, d.h. alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten der Punkte von  $D_4(v)$  verschwinden. Dabei unterscheiden wir nach den oben betrachteten Fällen für  $v$ . Sei  $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$  für alle  $P_{i,j,k}^{[T]}$  in  $\mathcal{M}_v$ . Da nach Voraussetzung für alle  $v \in V(\Delta)$  die in (i) gewählten Bézier-Bernstein-Punkte  $D_2(v)$  nach Lemma 2.8 bestimmen, folgt  $a_{i,j,k}^{[T]} = 0$  für alle  $P_{i,j,k}^{[T]} \in D_2(v)$ . Es verbleiben die Koeffizienten der Bézier-Bernstein-Punkte in  $D_4(v) \setminus D_2(v)$ .

**Fall 1:**  $v$  ist ein normaler Knoten;

Sei  $T_j \in \Delta_v$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , das von  $a_2$  und  $a_3$  begrenzte Dreieck. Mit den  $C^2$ -Bedingungen über den Kanten mit Endpunkt  $v$  und den gegebenen Koeffizienten entsprechend (ii) und (v) sind nach Lemma 2.8 alle Koeffizienten auf  $R_{3,4}(v, v_i)$  für alle  $i$  mit  $e_i \notin \{a_2, a_3\}$  sowie  $R_{3,4}(v, T_i)$  für alle  $i \neq j$  gleich Null. Da die vier Kanten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , paarweise verschiedene Steigungen besitzen, verschwinden nach Lemma 2.10 die Koeffizienten  $a_{4,i,3-i}^{[T_j]}$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Die Koeffizienten entsprechend (iii) und die  $C^2$ -Bedingung über  $a_3$  implizieren nach Lemma 2.10  $a_{3,1,3}^{[T_j]} = a_{3,2,2}^{[T_j]} = 0$ . Die verbleibenden beiden Koeffizienten von  $R_{3,4}(v, v_k)$ , wobei  $e_k = a_2$ , verschwinden mit der  $C^2$ -Bedingung über  $a_2$  nach Korollar 2.9. Damit sind alle Koeffizienten auf  $D_4(v)$  gleich Null.

**Fall 2:**  $v$  ist ein defekter Knoten;

Sei  $a = e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , die in  $v$  nichtdegenerierte Kante. Mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend (ii) und (iv) und den  $C^2$ -Bedingungen über den Kanten mit Endpunkt  $v$  verschwinden nach Lemma 2.8 alle Koeffizienten auf  $D_4(v) \setminus R_{3,4}(v, v_i)$ . Da keine vier aufeinanderfolgenden Kanten mit Endpunkt  $v$  mit paarweise verschiedenen Steigungen existieren, ist dabei  $a_{4,0,3}^{[T_i]}$  nicht überbestimmt! Die verbleibenden drei Koeffizienten von  $R_{3,4}(v, v_i)$  sind nach Korollar 2.9 mit dem Koeffizient  $a_{3,4,0}^{[T_i]}$  entsprechend (iii) gleich Null. Somit verschwinden alle Koeffizienten auf  $D_4(v)$ .

**Fall 3:**  $v$  ist ein singulärer Knoten;

Die  $C^2$ -Bedingungen über den Kanten mit Endpunkt  $v$  und die gegebenen Koeffizienten entsprechend (ii) implizieren nach Lemma 2.8 Null für alle Koeffizienten auf  $R_{3,4}(v, v_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Da alle Kanten mit Endpunkt  $v$  in  $v$  degeneriert sind, verschwinden mit der  $C^2$ -Bedingung über diesen Kanten und den Koeffizienten entsprechend (iii) die verbleibenden Koeffizienten auf  $R_{3,4}(v, T_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Somit sind alle Koeffizienten auf  $D_4(v)$  gleich Null.

**Fall 4:**  $v$  ist ein Randknoten;

Für einen Randknoten  $v$  sind mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend (ii) und den  $C^2$ -Bedingungen über den Kanten mit Endpunkt  $v$  nach Lemma 2.8 alle Koeffizienten auf  $R_{3,4}(v, v_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gleich Null. Zusammen mit den Koeffizienten entsprechend (iii) folgt schließlich, dass alle Koeffizienten auf  $R_{3,4}(v, T_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , verschwinden. Damit sind alle Koeffizienten auf  $D_4(v)$  gleich Null.

#

Wir konstruieren nun eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Dazu definieren wir Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}(\Delta)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Seien



- $\mathcal{M}_1$ : 6 Punkte in  $D_2(v)$ , die  $D_2(v)$  bestimmen, für jeden Knoten  $v \in V(\Delta)$ ;
- $\mathcal{M}_2$ : 3 Punkte, die  $R_{3,4}(v, u)$  bestimmen, für jede unmarkierte Kante  $[v, u] \in E(\Delta)$ ;
- $\mathcal{M}_3$ : 1 geeigneter Punkt in  $R_{3,4}(v, u)$ , für jede einfach markierte Kante  $[v, u] \in E(\Delta)$ ;
- $\mathcal{M}_4$ : 2 geeignete Punkte in  $R_{3,4}(v, u)$ , für jede zweifach markierte Kante  $[v, u] \in E(\Delta)$ ;
- $\mathcal{M}_5$ : 3 Punkte in  $R_{3,4}(v, T)$  für ein  $T \in \Delta_v$ , für jeden Knoten  $v \in V(\Delta)$ , wobei  $T$  für jeden normalen Knoten  $v$  nicht das von  $a_2$  und  $a_3$  begrenzte Dreieck ist.

**Theorem 6.7:**

Sei  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Dann ist

$$\mathcal{M} := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{M}_i$$

eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  und es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)) = \#\mathcal{M} = lb_7^2(\Delta).$$

**Beweis:**

Sei  $\tau_3$  die Anzahl der singulären und  $\tau_1$  die Anzahl der defekten Knoten der Triangulierung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M} &= 6\#V(\Delta) + 3(\#E(\Delta) - \#V_I(\Delta)) + \tau_1 + 3\tau_3 + 3\#V(\Delta) \\ &= 15\#E_I(\Delta) - 30\#V_I(\Delta) + 36 + \tau_1 + 3\tau_3 \\ &= lb_7^2(\Delta) \leq \dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta)), \end{aligned}$$

wobei  $lb_7^2(\Delta)$  die untere Schranke von Schumaker [131] für die Dimension von  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  ist. Somit reicht es zu zeigen, dass  $\mathcal{M}$  eine bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  ist. Wir betrachten zunächst die nichtsingulären, inneren Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $\Delta$ , deren Reihenfolge durch die Konstruktion der Pfade nach Algorithmus 6.3 festgelegt ist.

Aus  $\mathcal{M} \cap D_4(v_1) = \mathcal{M}_{v_1}$  folgt nach Lemma 6.6, dass  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf  $D_4(v_1)$  bestimmt ist. Sei jetzt  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf  $D_4(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $k \leq n$ , bereits bestimmt, dann betrachten wir  $D_4(v_k)$ . Es gilt

$$\left( \mathcal{M} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} D_4(v_i) \right) \right) \cap D_4(v_k) = \mathcal{M}_{v_k}.$$

Daher ist  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  nach Lemma 6.6 auf  $D_4(v_k)$  bestimmt. Sei schließlich  $v$  ein singulärer Knoten oder ein Randknoten. Dann gilt

$$\left( \mathcal{M} \cup \left( \bigcup_{i=1}^n D_4(v_i) \right) \right) \cap D_4(v) = \mathcal{M}_v.$$

Also ist nach Lemma 6.6 der Splineraum  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  auf  $D_4(v)$  bestimmt. Mit Bemerkung 6.1 folgt, dass  $\mathcal{M}$  eine bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$  ist.

#

## 6.3 Hermite-Interpolation

In diesem Abschnitt konstruieren wir Hermite-Interpolationsmengen für den Splineraum  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Basierend auf der minimal bestimmenden Menge dieses Raums aus Paragraph 6.2 betrachten wir zunächst einzelne Zellen von  $\Delta$  und durchlaufen diese dann mithilfe der konstruierten Pfade. Dabei wählen wir geeignete Interpolationsbedingungen in den Knoten zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ .

Sei  $v \in V(\Delta)$  im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch Kanten  $e_i := [v, v_i]$  und  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ein Einheitsvektor entlang  $e_i$ . Ferner sei  $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$ ,  $v_{n+1} = v_1$ , die Zelle von  $v$ . Falls  $v$  ein Randknoten ist, entfällt das Dreieck  $T_n$ . Dann definieren wir für eine genügend oft differenzierbare Funktion  $f$  und  $s \in \mathcal{S}_7^2(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$  für alle  $T \in \Delta$ , die Menge  $\mathcal{H}_v$  von Interpolationsbedingungen im Knoten  $v$ . Dabei unterscheiden wir vier Fälle:

**Fall 1:**  $v$  ist ein normaler Knoten;

Nach Algorithmus 6.3 gibt vier aufeinanderfolgende Kanten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , in  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  mit paarweise verschiedenen Steigungen. Dann sei  $\mathcal{H}_v$

- (i)  $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,
- (ii)  $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$ ,  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$  und  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für alle  $e_i \notin \{a_2, a_3\}$ ,
- (iii)  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für die Kante  $e_i = a_2$ ,
- (iv)  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  und  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$  für die Kante  $e_i = a_3$  sowie
- (v)  $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ ,  $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$  und  $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$  für ein Dreieck  $T_i$ , das nicht von  $a_2$  und  $a_3$  begrenzt wird.

**Fall 2:**  $v$  ist ein defekter Knoten;

Nach Algorithmus 6.3 gibt es eine Kante  $a \in \{e_i, i = 1, \dots, n\}$  die im Knoten  $v$  nichtdegeneriert ist. Dann sei  $\mathcal{H}_v$  gegeben durch

- (i)  $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,
- (ii)  $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$ ,  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$  und  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für alle  $e_i \neq a$ ,
- (iii)  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für die Kante  $e_i = a$  sowie
- (iv)  $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ ,  $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$  und  $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Fall 3:**  $v$  ist ein singulärer Knoten;

Dann enthalte  $\mathcal{H}_v$  die Bedingungen

- (i)  $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,
- (ii)  $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$ ,  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$  und  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für  $i = 1, \dots, 4$  sowie
- (iii)  $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ ,  $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$  und  $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$  für ein  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

**Fall 4:**  $v$  ist ein Randknoten;

Dann sei  $\mathcal{H}_v$  die Menge der Bedingungen

- (i)  $D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ ,
- (ii)  $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3}(v)$ ,  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v)$  und  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- (iii)  $p_{d_n^3}^{[T_n]}(v) = f_{d_n^3}(v)$ ,  $p_{d_n^3 d_{n-1}}^{[T_n]}(v) = f_{d_n^3 d_{n-1}}(v)$  und  $p_{d_n^4}^{[T_n]}(v) = f_{d_n^4}(v)$  sowie
- (iv)  $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ ,  $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$  und  $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$  für ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Lemma 6.8:**

Sei  $\mathcal{H}_v$ ,  $v \in V(\Delta)$ , wie oben. Dann sind durch die Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}_v$  die partiellen Ableitungen  $D^w p^{[T]}(v)$ ,  $w = 0, \dots, 4$ , für alle  $T \in \Delta_v$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:**

Für alle  $v \in V(\Delta)$  sind durch die in (i) gegebenen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}_v$  mit der  $C^2$ -Stetigkeit in  $v$  die partiellen Ableitungen  $D^w p^{[T]}(v)$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $T \in \Delta_v$  eindeutig bestimmt. Es verbleiben die partiellen Ableitungen dritter und vierter Ordnung. Wir betrachten vier Fälle:

**Fall 1:**  $v$  ist ein normaler Knoten;

Sei o.B.d.A.  $a_i = e_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Die Interpolationsbedingungen (ii) und (v) in  $\mathcal{H}_v$  implizieren mit der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten mit Endpunkt  $v$  die Eindeutigkeit der Ableitungen  $D^w p^{[T_i]}(v)$ ,  $w = 3, 4$ ,  $i \geq 4$ . Nach Lemma 2.7 lassen sich die vier partiellen Ableitungen  $D^3 p^{[T_2]}(v)$  eindeutig berechnen. Die  $C^2$ -Stetigkeit über  $a_3$  und  $a_2$  mit Lemma 2.6 liefert zusammen mit den Bedingungen (iii) bzw. (ii) in  $\mathcal{H}_v$  die Eindeutigkeit von  $D^w p^{[T_j]}(v)$ ,  $w = 3, 4$ ,  $j = 1, \dots, 3$ .

**Fall 2:**  $v$  ist ein defekter Knoten;

Sei o.B.d.A.  $a = e_2$ . Durch die in (ii) und (iv) gegebenen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}_v$  sind mit der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten mit Endpunkt  $v$  alle Ableitungen  $D^w p^{[T_i]}(v)$ ,  $w = 3, 4$ ,  $i \geq 3$ , eindeutig bestimmt. Die  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , liefert mit der Bedingung (iii) in  $\mathcal{H}_v$  nach Lemma 2.6 die Eindeutigkeit von  $D^w p^{[T_j]}(v)$ ,  $w = 3, 4$ ,  $j = 1, 2$ .

**Fall 3:**  $v$  ist ein singulärer Knoten;

Da alle Kanten  $e_i$  im Endpunkt  $v$  degeneriert sind, gilt  $p_{d_i^j d_{i+1}^k}^{[T_i]}(v) = -p_{d_{i+1}^j d_{i+2}^k}^{[T_{i+1}]}(v)$ ,  $i =$

1, ..., 4, wobei  $j = k = 2$  oder  $j = 1, 2, k = 3 - j$ . Somit lassen sich durch die Interpolationsbedingungen (ii) und (iii) in  $\mathcal{H}_v$  mit der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_i, i = 1, \dots, 4$ , alle Ableitungen  $D^w p^{[T_i]}(v), w = 3, 4, i = 1, \dots, 4$ , eindeutig berechnen.

**Fall 4:**  $v$  ist ein Randknoten;

Sei o.B.d.A.  $i = 1$  in (iv) von  $\mathcal{H}_v$ . Die  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_2$  und die Bedingungen (ii) und (iv) in  $\mathcal{H}_v$  implizieren die Eindeutigkeit von  $D^w p^{[T_2]}(v), w = 3, 4$ . Mit analogem Argument sind die Ableitungen  $D^w p^{[T_i]}(v), w = 3, 4, i = 3, \dots, n - 1$ , eindeutig bestimmt.

#

Wir leiten nun einen Zusammenhang zwischen partiellen Ableitungen in benachbarten Knoten von  $\Delta$  her. Seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_4)$  zwei benachbarte Dreiecke mit gemeinsamer, nicht in  $v_1$  degenerierter Kante  $e_{1,2} = [v_1, v_2]$ . Ferner seien  $d_{i,j}, i, j = 1, \dots, 4, i \neq j$ , Einheitsvektoren entlang  $e_{i,j} = [v_i, v_j]$  und die Polynome  $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_7, i = 1, 2$ , auf  $T_i = \Delta(v_1, v_2, v_{i+2})$  gegeben.

**Lemma 6.9:**

Aus  $D^w p^{[T_1]}(v_1) \equiv D^w p^{[T_1]}(v_2) \equiv 0, w = 0, \dots, 2$ , und  $p_{d_{1,2}^j}^{[T_1]}(v_1) = 0, j = 3, 4$ , folgt  $p_{d_{2,1}^j}^{[T_1]}(v_2) = 0, j = 3, 4$ . Gilt zusätzlich  $p_{d_{1,2}^j d_{1,3}}^{[T_1]}(v_1) = 0, j = 2, 3$ , und  $p_{d_{2,1}^j d_{2,3}}^{[T_1]}(v_2) = 0$ , so folgt  $p_{d_{2,1}^3 d_{2,3}}^{[T_1]}(v_2) = 0$ .

**Beweis:**

Die gegebenen Interpolationsbedingungen in  $v_1$  und  $v_2$  implizieren mindestens 8 Nullstellen für das univariate Polynom  $p_{|e_{1,2}}^{[T_1]} \in \Pi_7$ . Daher gilt  $p_{|e_{1,2}}^{[T_1]} \equiv 0$ . Mit den zusätzlichen Bedingungen existieren mindestens 7 Nullstellen für das univariate Polynom  $(p_{d_{1,3}}^{[T_1]})_{|e_{1,2}} \in \Pi_6$ . Es folgt  $(p_{d_{1,3}}^{[T_1]})_{|e_{1,2}} \equiv 0$  und damit die Behauptung.

#

Wir konstruieren jetzt Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_7^2(\Delta), \Delta \in \mathcal{T}$ . Sei  $s \in \mathcal{S}_7^2(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$  für alle  $T \in \Delta$ , und  $f$  eine genügend oft differenzierbare Funktion. Dann definieren wir Mengen von Interpolationsbedingungen  $\mathcal{H}_i, i = 1, \dots, 5$ , wie folgt:

$$\mathcal{H}_1: D^w p^{[T_1]}(v) = D^w f(v), w = 0, \dots, 2, \text{ für alle } v \in V(\Delta),$$

$$\mathcal{H}_2: p_{d_i^3}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^3}(v_j), p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v_j) \text{ und } p_{d_i^4}^{[T_i]}(v_j) = f_{d_i^4}(v_j) \text{ für alle Knoten } v_j \in V(\Delta) \text{ und alle Kanten } e_i = [v_j, v_i] \text{ mit Endpunkt } v_j \text{ mit } j < i, \text{ die nicht Pfad von } v_j \text{ sind,}$$

$$\mathcal{H}_3: p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v) \text{ und } p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^3 d_{i+1}}(v) \text{ für die Kante } e_i = a_3, \text{ für jeden normalen Knoten } v \in V(\Delta),$$

$\mathcal{H}_4$ :  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^4}(v)$  für die Kante  $e_i = a, a_2$  für jeden defekten bzw. normalen Knoten  $v \in V(\Delta)$  sowie

$\mathcal{H}_5$ :  $p_{d_i^2 d_{i+1}}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}}(v)$ ,  $p_{d_i d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i d_{i+1}^2}(v)$  und  $p_{d_i^2 d_{i+1}^2}^{[T_i]}(v) = f_{d_i^2 d_{i+1}^2}(v)$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wobei  $i \neq n$ , falls  $v$  ein Randknoten ist, und  $T_i$  für jeden normalen Knoten  $v$  nicht das von  $a_2$  und  $a_3$  begrenzte Dreieck ist.

**Theorem 6.10:**

Sei  $\Delta \in \mathcal{T}$ . Dann ist

$$\mathcal{H} := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{H}_i$$

eine Hermite-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_7^2(\Delta)$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion gilt  $\#\mathcal{H} = \#\mathcal{M} = \dim(\mathcal{S}_7^2(\Delta))$ . Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem  $f \equiv 0$  nur trivial lösbar ist. Wir zeigen induktiv, dass für alle Knoten  $v$  der Triangulierung  $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 4$ , für alle  $T \in \Delta_v$  gilt.

Die Menge der Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}$  im Knoten  $v_1$  entspricht der Menge  $\mathcal{H}_{v_1}$ . Somit folgt nach Lemma 6.8

$$D^w p^{[T_i]}(v_1) \equiv 0, \quad w = 0, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n_1.$$

Sei jetzt für  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $k \leq \#V(\Delta)$ , bereits gezeigt, dass  $D^w p^{[T_i]}(v_j) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 4$ ,  $i = 1, \dots, n_j$ , dann betrachten wir den Knoten  $v_k$ . Nach Lemma 6.9 sind mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}$  im Knoten  $v_k$  und  $v_i$  für alle  $e_i = [v_k, v_i]$  mit  $i \leq k-1$  nach Induktionsvoraussetzung die partiellen Ableitungen  $p_{d_i^3}^{[T_i]}(v_k)$ ,  $p_{d_i^4}^{[T_i]}(v_k)$ ,  $p_{d_i^3 d_{i+1}}^{[T_i]}(v_k)$  und  $p_{d_i^2 d_{i-1}}^{[T_{i-1}]}(v_k)$  gleich Null. Diese Bedingungen und die Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}$  im Knoten  $v_k$  ergeben die Menge  $\mathcal{H}_{v_k}$ . Daher folgt nach Lemma 6.8

$$D^w p^{[T_i]}(v_k) \equiv 0, \quad w = 0, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n_k.$$

Insgesamt gilt also  $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 4$ ,  $T \in \Delta_v$ , für alle Knoten  $v \in V(\Delta)$ . Dies impliziert  $s \equiv 0$ .

#

## 6.4 Modifikation von Triangulierungen

Im Folgenden formulieren wir einen zweistufigen Algorithmus, der aus einer Triangulierung  $\Delta \notin \mathcal{T}$  mithilfe weniger Clough-Tocher-Splits eine für die in Paragraph 6.3 beschriebene Interpolationsmethode geeignete Triangulierung  $\hat{\Delta} \in \mathcal{T}$  konstruiert. Im ersten Schritt werden alle defekten Knoten vom Grad  $\geq 4$  eliminiert, im zweiten Schritt dann geeignete

Kanten hinzugefügt, um in Algorithmus 6.3 für alle Knoten in  $V_{in}$  geeignete Pfade festlegen zu können. Wird ein Dreieck  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  unterteilt, so wählen wir dazu stets einen neuen Punkt im Innern von  $T$ , so dass sich für  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , durch die neuen Kanten die Anzahl der Kanten mit Endpunkt  $v_i$ , die paarweise verschiedene Steigungen besitzen, erhöht.

### 1. Schritt:

Für jeden defekten Knoten  $v_i \in V_I(\Delta)$  mit  $\text{Grad}(v_i) \geq 4$  wähle ein Dreieck  $T = \Delta(v_i, v_j, v_k)$  in  $\Delta_{v_i}$ , das nicht zu der Zelle eines singulären Knotens gehört, und unterteile  $T$  mit einem Clough-Tochter-Split. Ist  $\text{Grad}(v_i) = 6$ , und gehört jedes Dreieck mit Eckpunkt  $v_i$  zu der Zelle eines singulären Knotens, so wähle einen benachbarten, singulären Knoten  $v_j$  und unterteile die beiden Dreiecke mit gemeinsamer Kante  $[v_i, v_j]$ . Die so entstandene Triangulierung enthält keine defekten Knoten vom Grad  $\geq 4$  (vgl. Abbildung 45).

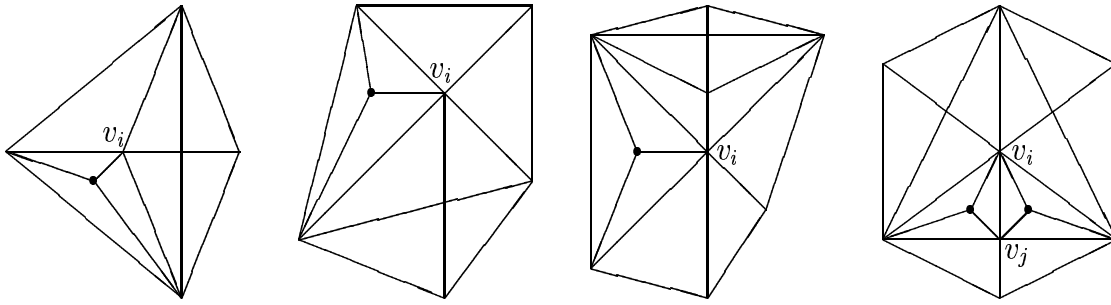


Abb. 45: Unterteilungen im 1. Schritt für defekte Knoten vom Grad 4, 5 und 6.

### 2. Schritt:

Für jeden defekten Knoten  $v$  vom Grad 3 ist jede Kante mit Endpunkt  $v$  in  $v$  nichtdegeneriert, also als Pfad wählbar. Somit reicht es, im Verlauf von Algorithmus 6.3 diejenigen (normalen) Knoten  $v \in V_{in}$  zu betrachten, für die keine geeigneten Pfade festgelegt werden können. Sei  $v \in V_{in}$  normal, und seien  $[v, v_i]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , vier im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgende Kanten im Endpunkt  $v$ , wobei  $v_2, v_3$  in  $V_{ok}$  liegen oder markiert sind, und  $[v, v_i]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , derart sind, dass mindestens zwei Kanten die gleiche Steigung besitzen. Da  $v_2$  und  $v_3$  nicht beide singulär oder vom Grad 3 sein können (dies zeigt ein einfaches Winkelargument), muss mindestens einer der beiden Knoten ein normaler sein. Dies sei o.B.d.A.  $v_2$ . Dann unterscheiden wir drei Fälle:

**Fall 1:**  $v_3$  ist ein normaler Knoten.

a) In der Menge  $\{[v, v_i], i = 1, \dots, 4\}$  gibt es drei Kanten paarweise verschiedener Steigung. Dann unterteile das Dreieck  $\Delta(v, v_2, v_3)$  mit einem Knoten  $z$  und markiere  $z$  mit Pfad  $a = [z, v_2]$  sowie  $v$  mit Pfaden  $a_2 = [v, v_2]$  und  $a_3 = [v, z]$  oder  $a_2 = [v, z]$  und  $a_3 = [v, v_3]$  (vgl. Abbildung 47, 1a)).

b) Die Kanten  $[v, v_1]$  und  $[v, v_3]$  sowie  $[v, v_2]$  und  $[v, v_4]$  haben die gleiche Steigung. Dann unterteile das Dreieck  $\Delta(v, v_2, v_3)$  mit einem Knoten  $z_1$  und das Dreieck  $\Delta(v, z_1, v_3)$  mit einem Knoten  $z_2$ . Markiere  $z_2$  mit Pfad  $a = [z_2, v_3]$ ,  $z_1$  mit Pfaden  $a_2 = [z_1, v_3]$  und  $a_3 = [z_1, z_2]$  und zuletzt  $v$  mit Pfaden  $a_2 = [v, z_2]$  und  $a_3 = [v, z_1]$  (vgl. Abbildung 47, 1b)).

a)  $v_3$  besitzt den Pfad  $a = [v_3, v_2]$ . Dann unterteile das Dreieck  $\Delta(v, v_2, v_3)$  mit einem Knoten  $z$  und markiere  $z$  mit Pfad  $a = [z, v_2]$ ,  $v_3$  jetzt mit Pfaden  $a_2 = [v_3, z]$  und  $a_3 = [v_3, v_2]$  und zuletzt  $v$  mit Pfaden  $a_2 = [v, v_2]$  und  $a_3 = [v, z]$  (vgl. Abbildung 47, 2a)).

**Fall 3:**  $v_3$  ist ein singulärer Knoten.

a)  $v_1$  ist nicht singulär. Ist  $v_1$  vom Grad 3 und  $[v_2, v_1]$  ein Pfad von  $v_2$ , so gehe wie in Fall 3b) vor. Ansonsten unterteile das Dreieck  $\Delta(v, v_1, v_2)$  mit einem Knoten  $z$  und markiere  $z$  mit Pfad  $a = [z, v_2]$  und  $v$  mit Pfaden  $a_2 = [v, v_2]$  und  $a_3 = [v, z]$ . Falls  $v_1$  vor der Unterteilung vom Grad 3 war, so markiere ihn mit den Pfaden  $a_2 = [v_1, v_2]$  und  $a_3 = [v_1, z]$  (vgl. Abbildung 47, 3a)).

b)  $v_1$  ist ein singulärer Knoten. Dann gilt  $v_1 \in V_{ok}$ . Von  $v_2$  aus kann nicht ein Pfad nach  $v_1$  und ein Pfad nach  $v_3$  verlaufen. Sei o.B.d.A. die Kante  $[v_2, v_3]$  kein Pfad von  $v_2$ . Dann unterteile das Dreieck  $\Delta(v, v_2, v_3)$  mit einem Knoten  $z_1$  und anschließend das Dreieck  $\Delta(z_1, v_2, v_3)$  mit einem Knoten  $z_2$ . Jetzt gilt  $v_3 \notin V_{ok}$ , da  $v_3$  nicht länger singulär ist. Markiere  $z_2$  mit Pfad  $a = [z_2, v_2]$ ,  $z_1$  mit Pfaden  $a_2 = [z_1, v_2]$  und  $a_3 = [z_1, z_2]$ , dann  $v_3$  mit Pfaden  $a_2 = [v_3, z_1]$  und  $a_3 = [v_3, z_2]$  und zuletzt  $v$  mit Pfaden  $a_2 = [v, z_1]$  und  $a_3 = [v, v_3]$  (vgl. Abbildung 47, 3b)).

Für eine gegebene Triangulierung  $\Delta \notin \mathcal{T}$  bezeichnen wir die durch die beiden Schritte der Modifikation entstandene Triangulierung mit  $\tilde{\Delta}$ . Nach Konstruktion gilt  $\tilde{\Delta} \in \mathcal{T}$ .

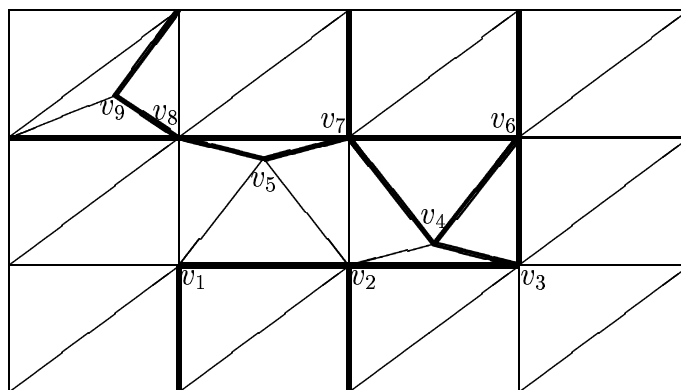


Abb. 46: Beispiel einer Modifikation.

### Beispiel 6.11:

Die Triangulierung  $\Delta$  aus Abbildung 42 liegt nicht in der Klasse  $\mathcal{T}$ . Der 1. Schritt der Modifikation entfällt, da  $\Delta$  keine defekten Knoten vom Grad  $\geq 4$  enthält. Im zweiten Schritt reicht es z.B. aus, ein geeignetes Dreieck zu unterteilen. Abbildung 46 zeigt die modifizierte Triangulierung  $\hat{\Delta}$  mit Reihenfolge der inneren Knoten und dazugehörigen Pfaden.

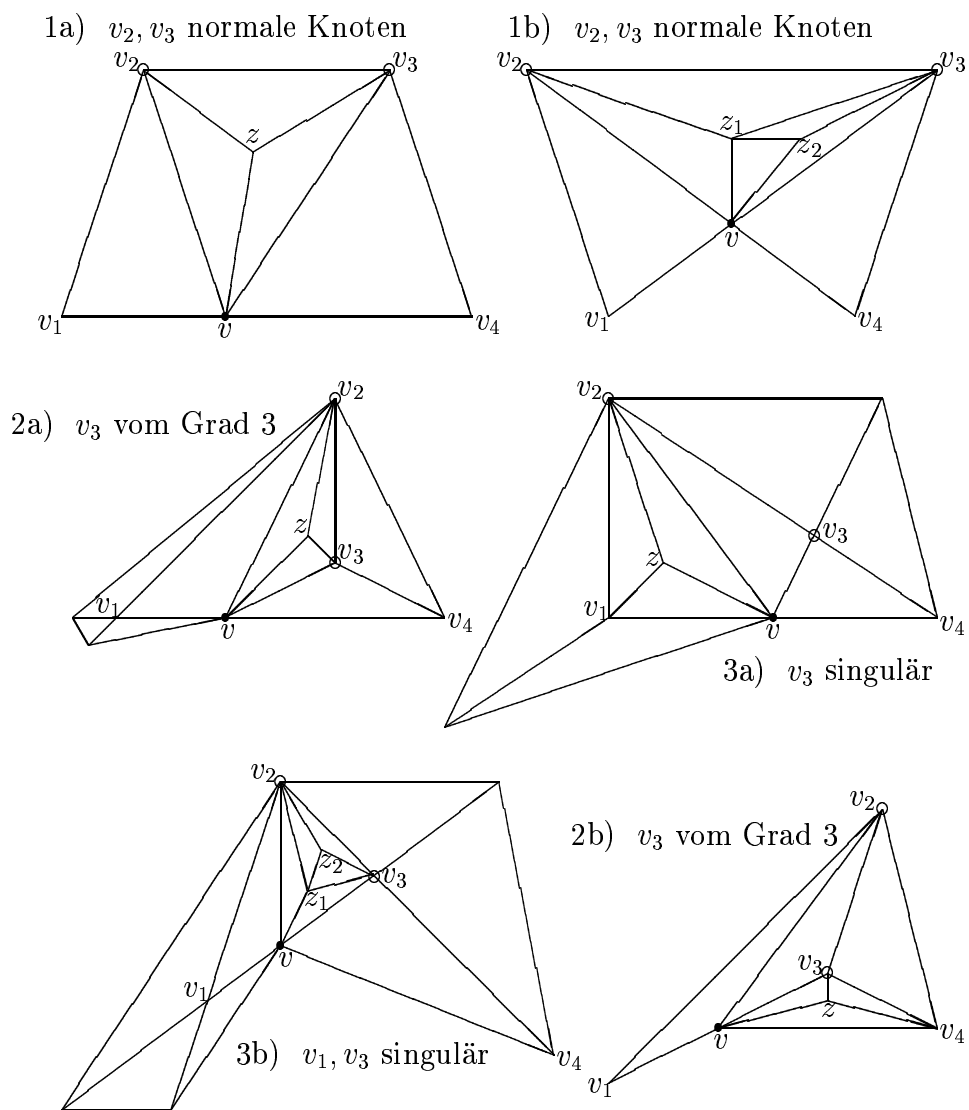


Abb. 47: Unterteilungen im 2. Schritt.



## Kapitel 7:

# Interpolation mit $C^2$ -Supersplines vom Grad $\geq 7$ auf Triangulierungen

Dieses Kapitel behandelt Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$ . Die Methoden von Morgan und Scott [101] zur Bestimmung der Dimension und Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_5^1(\Delta)$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$  wurden von Alfeld und Schumaker [4] basierend auf Resultaten von Alfeld, Piper und Schumaker [5] für Splineräume  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ,  $q \geq 4r + 1$ , verallgemeinert. Hong [77] bestimmte die Dimension von  $C^r$ -Splines vom Grad  $q \geq 3r + 2$  auf beliebigen Triangulierungen. Diese Ergebnisse wurden von Ibrahim und Schumaker [78] auf Supersplineräume übertragen. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [56] entwickelten darauf aufbauend eine Methode zur lokalen Hermite-Interpolation mit diesen Räumen. Zur Interpolation mit  $C^2$ -Splines niedrigen Grades existieren zahlreiche Methoden aus der Theorie der Finite-Elemente (vgl. [88,89,92,124,142]), wobei die betrachteten Triangulierungen geeignet verfeinert werden. Darüber hinaus wurden Verfahren zur Lagrange-Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^2(\Delta)$ ,  $q < 8$ , auf speziellen Klassen von Triangulierungen entwickelt. So gaben Nürnberger und Riessinger [105] für beliebige  $q$  und  $r$  Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^r(\Delta^i)$ ,  $i = 1, 2$ , auf regelmäßigen Rechteckstriangulierungen  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$  an. Nürnberger und Zeilfelder [112] entwickelten ein Verfahren zur Interpolation mit  $C^2$ -Splines vom Grad  $\geq 5$  auf einer Klasse von induktiv konstruierten Triangulierungen. Hermite-Interpolation mit  $\mathcal{S}_{3r+1}^r(\Delta)$ ,  $r \geq 1$ , auf nichtdegenerierten Triangulierungen, d.h. Triangulierungen ohne degenerierte Kanten (vgl. Abbildung 2), wurde von Alfeld und Schumaker [6] untersucht.

Wir beschreiben in diesem Kapitel die erste Methode zur Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$  auf beliebigen Triangulierungen  $\Delta$ . In Abschnitt 7.1 zerlegen wir zunächst  $\Delta$  in eine Kette von Subtriangulierungen, indem wir ausgehend von einem Startdreieck induktiv geeignete Dreiecke anhängen (vgl. auch Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [52,53,54,55]). Dabei wird für  $q = 7$  in seltenen Ausnahmefällen die Triangulierung geringfügig durch Clough-Tocher-Splits verfeinert. Für  $q \geq 8$  sind zur Interpolation keine solchen Unterteilungen notwendig. Mithilfe dieser Zerlegung durchlaufen wir in Abschnitt 7.2 die Dreiecke der Triangulierung und konstruieren induktiv eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ , wobei wir die durch die Zerlegung entstandenen Semisingularitäten berücksichtigen. Darauf aufbauend wählen wir in Paragraph 7.2 und 7.3 geeignete Punkte auf dem Startdreieck und den angehängten Dreiecken zur eindeutigen Lagrange-Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$ , ähnlich den Methoden von Davydov und Nürnberger [54], welche hier auf  $C^2$ -Splines verallgemeinert werden. Hermite-Interpolationsmengen sind wie bei den Verfahren von Nürnberger et. al. [54,55,105,112] als Grenzwert der Lagrange-Interpolationsmengen interpretierbar.

## 7.1 Zerlegung von $\Omega$

In diesem Abschnitt konstruieren wir geeignete Zerlegungen beliebiger Triangulierungen  $\Delta$  zur Interpolation mit  $C^2$ -Supersplines vom Grad  $\geq 7$ . Ausgehend von einem Startdreieck werden induktiv geeignete Dreiecke der Triangulierung anhängt und so das polygonale Grundgebiet in eine Kette von Teilmengen und  $\Delta$  in eine Kette von Subtriangulierungen zerlegt. Für  $q = 7$  wird in sehr selten vorkommenden Ausnahmefällen die Triangulierung geringfügig modifiziert, indem einige Dreiecke durch Clough-Tocher-Splits unterteilt werden. Für die Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 8$ , ist keine solche Modifikation notwendig.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein einfach zusammenhängendes, polygonales Gebiet und  $\Delta$  eine Triangulierung von  $\Omega$ . Dann definieren wir eine Kette von Subtriangulierungen  $\Delta_m$ ,  $m = 0, \dots, n$ ,  $\Delta_n = \Delta$ , und dadurch eine Kette von Teilmengen  $\Omega_m$ ,  $m = 0, \dots, n$ , mit der Eigenschaft

$$\Omega_0 \subset \dots \subset \Omega_n = \Omega.$$

Wir setzen  $\Omega_0 = T = \Delta(w_1, w_2, w_3) \in \Delta$  ein beliebiges Dreieck der Triangulierung, das Startdreieck, und definieren  $\Omega_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , induktiv. Sei  $\Omega_{m-1}$  für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits konstruiert, so wählen wir einen Knoten  $v_m \in V(\Delta)$  mit  $v_m \notin \Omega_{m-1}$ , für den folgende drei Bedingungen erfüllt sind (vgl. Abbildungen 48 und 49).

- (i) Es gibt mindestens ein Dreieck mit Eckpunkt  $v_m$  in  $\Delta$ , das eine gemeinsame Kante mit  $\Omega_{m-1}$  besitzt.

Seien  $T_{m,1}, \dots, T_{m,n_m}$ ,  $n_m \geq 1$ , alle Dreiecke in  $\Delta$  mit dieser Eigenschaft, dann setzen wir

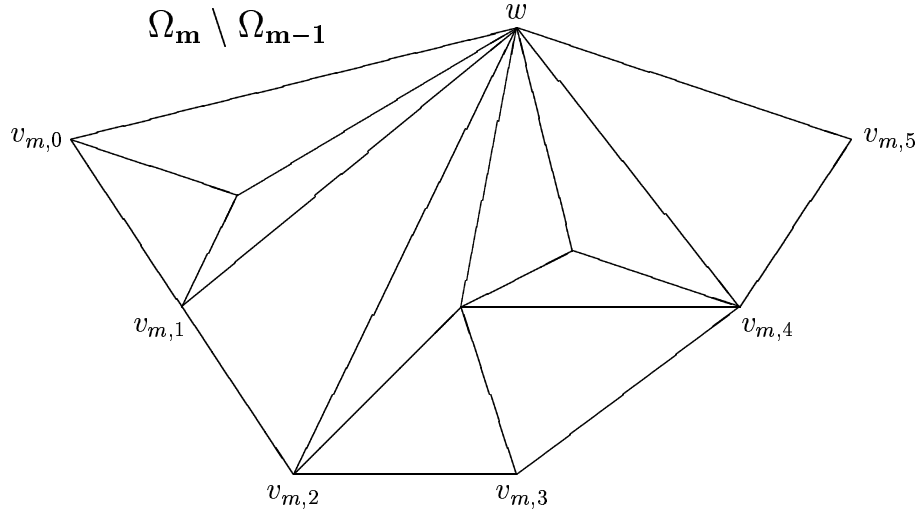
$$\Omega_m := \Omega_{m-1} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_m} T_{m,i} \right)$$

und  $\Delta_m := \{T \in \Delta \mid T \subset \Omega_m\}$ , die zu  $\Omega_m$  gehörende Subtriangulierung von  $\Delta$ .

- (ii)  $\Omega_m$  ist einfach zusammenhängend, d.h. besitzt keine Löcher. Ein LOCH von  $\Omega_m$  ist eine beschränkte, einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_m$ .
- (iii) Für alle  $v_j, v_k \in V(\Delta_m)$  mit  $[v_j, v_k] \in E(\Delta)$  gilt  $[v_j, v_k] \subset \Omega_m$ .

### Beispiel 7.1:

- Abbildung 48 zeigt einen Knoten  $w$ , der nicht hinzugefügt werden kann. In diesem Gegenbeispiel entsteht in  $\Omega_m$  ein Loch mit den Eckpunkten  $w, v_{m,2}, v_{m,3}$  und  $v_{m,4}$  (Widerspruch zu (ii)) und die Kante  $[w, v_{m,0}]$  läge nicht in  $\Omega_m$  (Widerspruch zu (iii)).
- Ein möglicher Knoten  $v_m$  mit  $n_m = 4$  ist in Abbildung 49 zu sehen.

Abb. 48: Gegenbeispiel eines Knotens  $w$ .**Lemma 7.2:**

Sei  $\Omega_{m-1}$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , konstruiert. Dann gibt es einen Knoten zur Festlegung von  $\Omega_m$ .

**Beweis:**

Da  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, gibt es immer einen Knoten  $u_1 \in V(\Delta)$ ,  $u_1 \notin \Omega_{m-1}$ , der (i) erfüllt. Sei  $\{v_{m,i}, i = 0, \dots, n_m\}$  die Menge der aufeinanderfolgenden Knoten in  $V_B(\Delta_{m-1})$ , die alle in  $V_B(\Delta_{m-1})$  liegenden, benachbarten Knoten von  $u_1$  enthält (vgl.  $u_1$  mit  $w$  in Abbildung 48).  $u_1$  genügt genau dann auch (ii) und (iii), wenn im Innern des von  $v_{m,0}, \dots, v_{m,n_m}$  und  $u_1$  erzeugten Polygonebiets  $P_1$  keine weiteren Knoten von  $\Delta$  liegen. Befinden sich im Innern von  $P_1$  Knoten  $w_1, \dots, w_{k_1} \in V(\Delta)$ , so betrachte ein  $u_2 \in \{w_1, \dots, w_{k_1}\}$ , das (i) erfüllt. Im Innern des entsprechenden Polygonebiets  $P_2 \subset P_1$  liegen dann nur  $k_2 < k_1$  Knoten der Triangulierung. Da  $\#V(\Delta) < \infty$ , gibt es nach endlich vielen Schritten einen Knoten  $u_i = v_m \in V(\Delta)$ ,  $v_m \notin \Omega_{m-1}$ , der (i), (ii) und (iii) erfüllt.

#

Für  $\Delta_m$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , setzen wir  $T_{m,i} = \Delta(v_m, v_{m,i-1}, v_{m,i})$ ,  $i = 1, \dots, n_m$ , und  $e_{m,i} = [v_m, v_{m,i}]$ ,  $i = 0, \dots, n_m$ , und definieren Parameter  $\tau_m, c_{m,0}, \dots, c_{m,n_m} \in \{0, 1\}$  abhängig von den Eigenschaften der Knoten  $v_m, v_{m,0}, \dots, v_{m,n_m}$  (vgl. Abbildung 49). Wir setzen für  $j \in \{0, n_m\}$

$$c_{m,j} := \begin{cases} 0, & \text{falls } v_{m,j} \text{ semisingulär bzgl. } \Delta_m \text{ ist, und } e_{m,j} \text{ in } v_{m,j} \\ & \text{nichtdegeneriert ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $j \in \{1, \dots, n_m - 1\}$  sei

$$c_{m,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } e_{m,j} \text{ in } v_{m,j} \text{ degeneriert ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem setzen wir

$$\tau_m := \begin{cases} 0, & \text{falls } v_m \in V_I(\Delta) \text{ semisingulär bzgl. } \Delta_m \text{ und nichtsingulär ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gilt  $c_{m,0} = c_{m,n_m} = \tau_m = 0$ , so führen wir für die Interpolation mit  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  eine lokale Modifikation der Triangulierung durch. Wir unterteilen das Dreieck  $\Delta(v_m, v_{m,0}, w) \in \Delta \setminus \Delta_m$  durch einen Clough-Tocher-Split mit einem Knoten  $z_m$ , und fügen  $v_{m+1} := z_m$  mit  $\Omega_{m+1} := \Omega_m \cup \Delta(v_m, v_{m,0}, w)$  in die Zerlegung ein. Dadurch gilt  $\tau_m = \tau_{m+1} = 1$  (vgl. Abbildung 50). Für die Interpolation mit  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 8$ , ist keine Modifikation von  $\Delta$  notwendig.

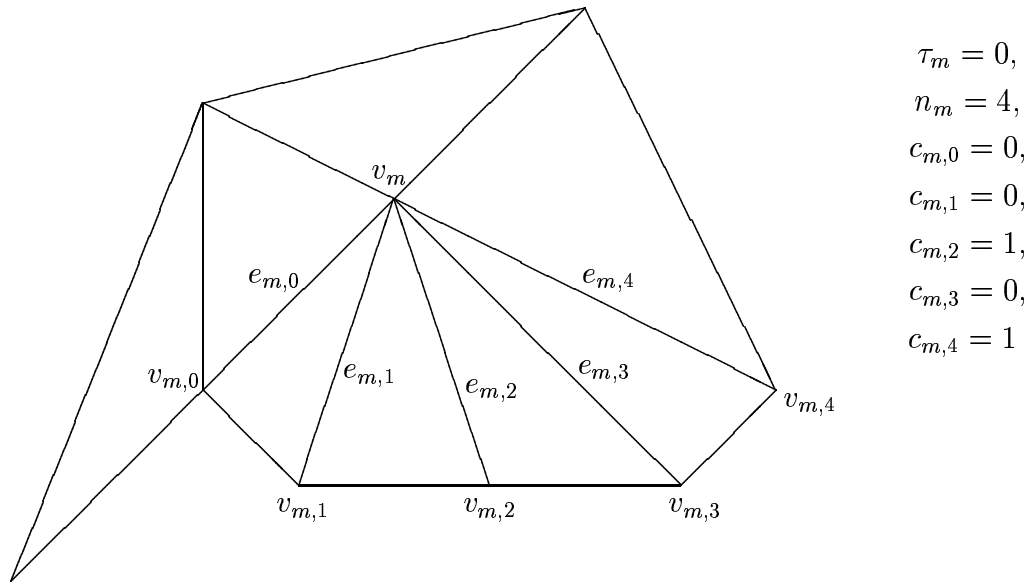
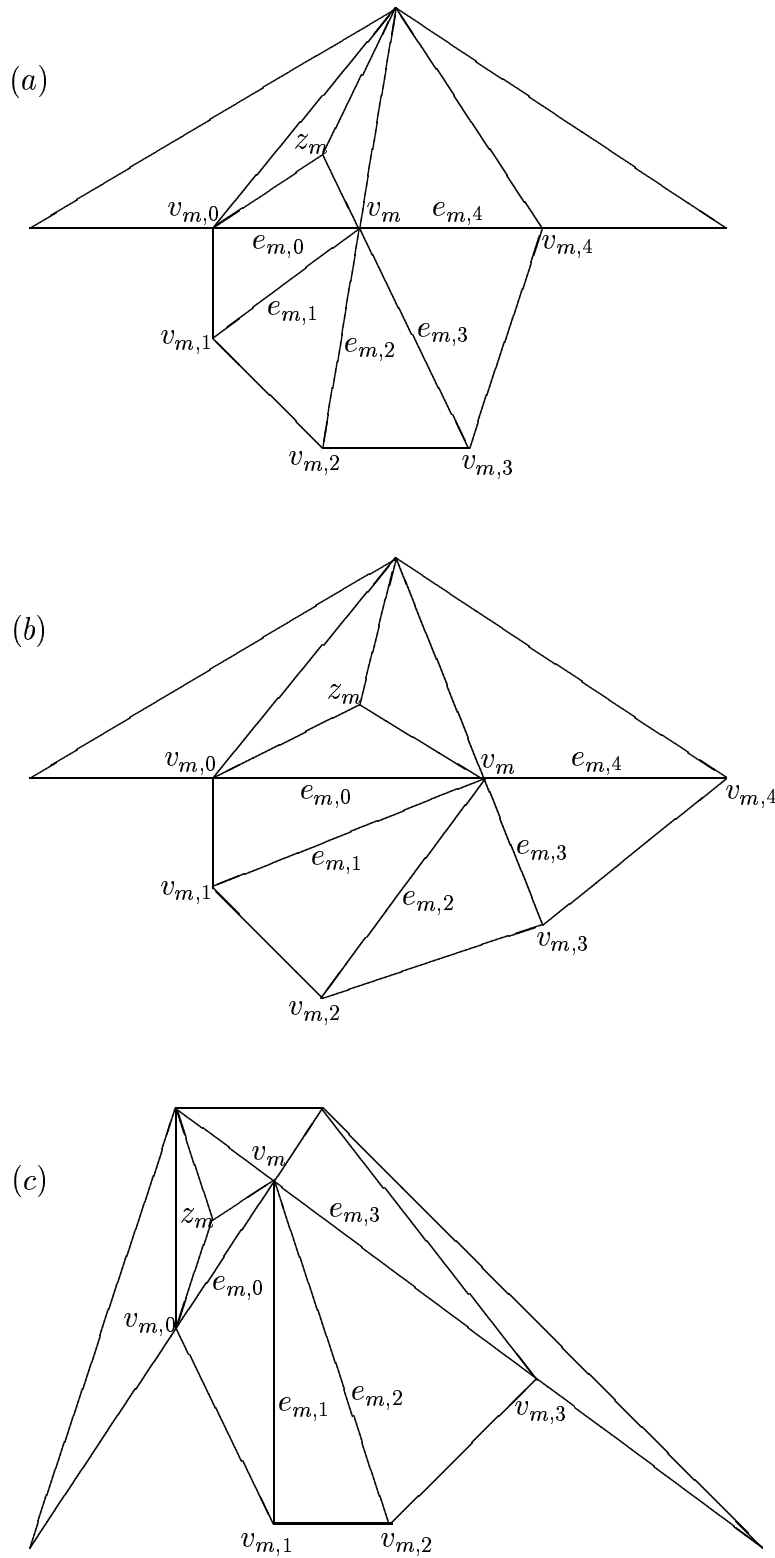


Abb. 49: Beispiel für  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$  mit Parametern  $\tau_m$  und  $c_{m,0}, \dots, c_{m,n_m}$ .

### Bemerkung 7.3:

Der Fall  $c_{m,0} = c_{m,n_m} = \tau_m = 0$  ist eine Ausnahmesituation, die nur in den folgenden sehr selten auftretenden Konstellationen vorkommt:

- $v_m$  ist nichtsingulär und semisingulär vom Typ 1 bzgl.  $\Delta_m$  und  $v_{m,0}$  sowie  $v_{m,n_m}$  sind semisingulär bzgl.  $\Delta_m$  (vgl. Abbildung 50, (a)).
- $v_m$  ist nichtsingulär und semisingulär vom Typ 1 bzgl.  $\Delta_m$ . Zusätzlich ist einer der beiden Knoten  $v_{m,0}$ ,  $v_{m,n_m}$  semisingulär bzgl.  $\Delta_m$  und bei dem anderen die Kante  $e_{m,j}$ ,  $j \in \{0, n_m\}$ , in  $v_m$  degeneriert (vgl. Abbildung 50, (b)).
- $v_m$  ist nichtsingulär und semisingulär vom Typ 2 bzgl.  $\Delta_m$  und  $v_{m,0}$  sowie  $v_{m,n_m}$  sind semisingulär bzgl.  $\Delta_m$  (vgl. Abbildung 50, (c)).


 Abb. 50: Modifikationen in den Fällen  $c_{m,0} = c_{m,n_m} = \tau_m = 0$ .

## 7.2 Interpolation mit $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$

In diesem Abschnitt geben wir für beliebige Triangulierungen  $\Delta$  minimal bestimmende Mengen der Splineräume  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  an und berechnen so unter Verwendung von Bézier-Bernstein-Methoden deren Dimension. Darauf aufbauend wählen wir geeignete Interpolationspunkte bzw. Interpolationsbedingungen im Startdreieck und auf den induktiv angehängten Dreiecken, die Lagrange- bzw. Hermite-Interpolationsmengen für diese Splineräume bilden.

### 7.2.1 Bestimmung der Dimension

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung, zerlegt wie in Abschnitt 7.1 beschrieben. Wir setzen  $\mathcal{M}_0^{(7)} = \{P_{i,j,k}^{[T]} \mid i, j, k \geq 0, i + j + k = 7\}$ , die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte des Startdreiecks  $T = \Omega_0 \in \Delta$ , und wählen die Punkte  $\mathcal{M}_m^{(7)} \setminus \mathcal{M}_{m-1}^{(7)} \subset \mathcal{M}(\Delta)$  auf den Dreiecken von  $\Delta_m \setminus \Delta_{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, n$ , induktiv. Hier und im Folgenden sei für  $\tau_m = 0$  o.B.d.A.  $c_{m,n_m} = 1$ . (Im Fall  $(\tau_m = 0, c_{m,n_m} = 0)$  gilt nach Konstruktion  $c_{m,0} = 1$ . Setze dann  $v_{m,l} := v_{m,n_m-l}$  für  $l = 0, \dots, n_m$ ). Sei jetzt  $\mathcal{M}_{m-1}^{(7)}$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , bereits konstruiert, dann definieren wir  $\mathcal{M}_m^{(7)} \setminus \mathcal{M}_{m-1}^{(7)}$  als die Menge der Punkte

- $P_{i,j,k}^{[T_{m,1}]}$ ,  $i + j + k = 7$ ,  $i \geq 4$ ,  $j, k \geq 0$ , und  $P_{3,2,2}^{[T_{m,1}]}$ ,
- $P_{3,1,3}^{[T_{m,j}]}$  für alle  $j \in \{1, \dots, n_m - 1\}$  mit  $c_{m,j} = 1$ ,
- $P_{3,3,1}^{[T_{m,1}]}$ , falls  $c_{m,0} = 1$ , und
- $P_{3,1,3}^{[T_{m,n_m}]}$ , falls  $(c_{m,n_m} = 1, \tau_m = 1)$ .

#### Theorem 7.4:

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung. Dann ist  $\mathcal{M}^{(7)} = \mathcal{M}_n^{(7)}$  eine minimal bestimmende Menge für den Spliner Raum  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  und es gilt

$$\#\mathcal{M}^{(7)} = \dim(\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)) = 10\#V(\Delta) - 3\#N(\Delta) + 3\#E(\Delta) + \sigma(\Delta).$$

#### Beweis:

Wir zeigen, dass zu jeder Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend der Menge  $\mathcal{M}^{(7)}$  genau ein Spline  $s \in \mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  existiert, der diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt. Dann ist  $\mathcal{M}^{(7)}$  eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  (vgl. [112,113]). Sei also  $s \in \mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ , gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T]}$ ,  $i + j + k = 7$ , für alle  $T \in \Delta$ .

Auf dem Startdreieck  $T$  sind alle Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T]}$ ,  $i + j + k = 7$ , gegeben, da  $\mathcal{M}^{(7)}$  alle Bézier-Bernstein-Punkte von  $T$  enthält. Sei jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits gezeigt, dass alle  $a_{i,j,k}^{[T]}$ ,  $P_{i,j,k}^{[T]} \in \mathcal{M}(\Delta_{m-1})$ , eindeutig bestimmt sind, dann betrachten wir

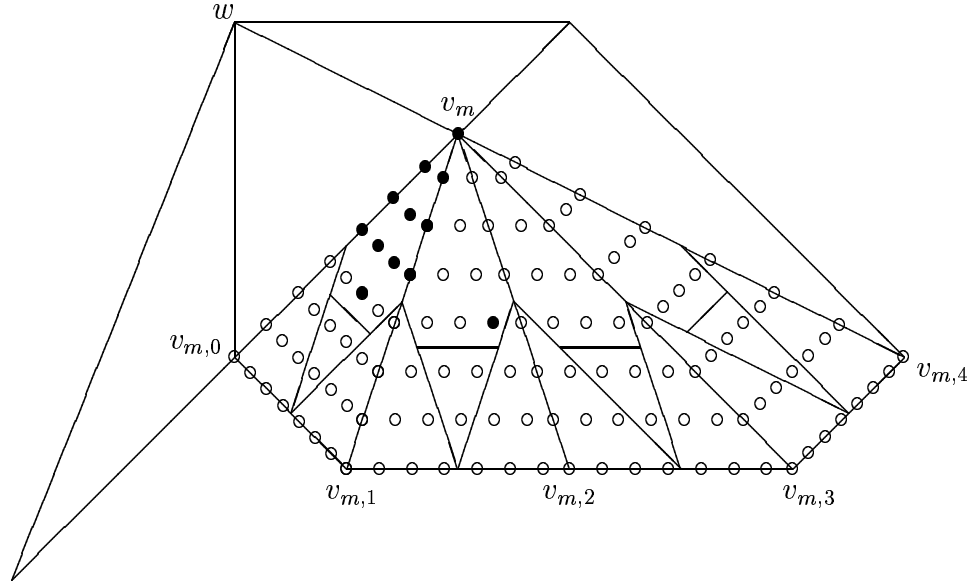


Abb. 51: Die Menge  $\mathcal{M}_m^{(7)} \setminus \mathcal{M}_{m-1}^{(7)}$  auf dem Gebiet  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ .

$s$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ . Nach Lemma 2.8 lassen sich mit den  $C^2$ -Bedingungen über den Kanten  $[v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und der Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{m,l}$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ , die Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T_{m,l}]}$ ,  $l = 1, \dots, n_m$ , für alle  $i + j + k = 7$  mit  $i \leq 2$ , sowie  $a_{3,4,0}^{[T_{m,l}]}$ ,  $a_{3,0,4}^{[T_{m,l}]}$ ,  $l = 1, \dots, n_m$ , eindeutig berechnen. Es gilt  $\{P_{i,j,k}^{[T_{m,1}]}, i \geq 4\} \subset \mathcal{M}_m^{(7)}$ . Nach Lemma 2.8 sind daher die Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T_{m,l}]}$ ,  $l = 1, \dots, n_m$ , für alle  $i + j + k = 7$  mit  $i \geq 4$  eindeutig bestimmt.

Auf dem Dreieck  $T_{m,1}$  ist der Koeffizient  $a_{3,1,3}^{[T_{m,1}]}$  gegeben, falls  $c_{m,1} = 1$  ist, bzw. kann im Fall  $c_{m,1} = 0$  aus  $a_{i,j,k}^{[T_{m,1}]}$  für  $(i, j, k) \in \{(2, 2, 3); (2, 1, 4); (2, 0, 5); (3, 0, 4); (4, 0, 3)\}$  und  $a_{2,3,2}^{[T_{m,2}]}$  nach Korollar 2.9 eindeutig berechnet werden. Gilt  $c_{m,0} = 1$ , so ist  $a_{3,3,1}^{[T_{m,1}]}$  gegeben. Andernfalls ist  $v_{m,0}$  semisingulär bzgl.  $\Delta_m$  und es gibt ein Dreieck  $T = \Delta(v_m, w, v_{m,0}) \in \Delta \setminus \Delta_m$  (vgl. Abbildung 51), auf dem die Koeffizienten  $a_{2,j,5-j}^{[T]}$ ,  $j = 0, \dots, 2$ , mit der  $C^2$ -Bedingung über  $[v_{m,0}, w]$  eindeutig bestimmt sind. Daher implizieren  $a_{i,j,k}^{[T_{m,1}]}$ ,  $(i, j, k) \in \{(2, 3, 2); (2, 5, 0); (3, 4, 0); (4, 3, 0)\}$ , nach Korollar 2.9 die Eindeutigkeit von  $a_{3,3,1}^{[T_{m,1}]}$ . Wegen  $P_{3,2,2}^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{M}_m^{(7)}$  ist  $a_{3,2,2}^{[T_{m,1}]}$  gegeben. Folglich sind alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten von  $s|_{T_{m,1}}$  eindeutig bestimmt.

Wir betrachten jetzt induktiv die Dreiecke  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m - 1$ . Mit der  $C^2$ -Bedingung über der Kante  $e_{m,l-1}$  lassen sich nach Lemma 2.8 die Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T_{m,l}]}$  für alle  $i + j + k = 7$  mit  $k \leq 2$  eindeutig berechnen. Mit analoger Argumentation wie bei  $a_{3,1,3}^{[T_{m,1}]}$  auf  $T_{m,1}$  liefert die  $C^2$ -Bedingung über der Kante  $e_{m,l}$  nach Korollar 2.9 die Eindeutigkeit von  $a_{3,1,3}^{[T_{m,l}]}$ . Folglich sind alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten des Polynoms  $s|_{T_{m,l}}$  eindeutig bestimmt.

Es verbleibt das Dreieck  $T_{m,n_m}$ . Die  $C^2$ -Bedingung über der Kante  $e_{m,n_m-1}$  impliziert nach Lemma 2.8 die Eindeutigkeit von  $a_{i,j,k}^{[T_{m,n_m}]}$  für alle  $i + j + k = 7$  mit  $k \leq 2$ . Gilt  $\tau_m = 1$ ,

so ist  $a_{3,1,3}^{[T_{m,n_m}]}$  entweder gegeben ( $c_{m,n_m} = 1$ ) oder lässt sich mit analoger Argumentation wie  $a_{3,3,1}^{[T_{m,1}]}$  auf  $T_{m,1}$  eindeutig berechnen ( $c_{m,n_m} = 0$ ). Der Fall  $\tau_m = 0$  impliziert nach Konstruktion  $c_{m,n_m} = 1$ . Dann gibt es  $\lambda_m \in \{2, 3\}$  Dreiecke  $\tilde{T}_l = \Delta(v_m, w_{l-1}, w_l) \in \Delta \setminus \Delta_m$ ,  $l = 1, \dots, \lambda_m$ , mit  $w_0 = v_{m,0}$  und  $w_{\lambda_m} = v_{m,n_m}$ , wobei die Kanten  $[w_l, v_m]$ ,  $l = 1, \dots, \lambda_m - 1$ , in  $v_m$  degeneriert sind. Nach Lemma 2.8 sind mit den  $C^2$ -Bedingungen über diesen Kanten insbesondere die Koeffizienten  $a_{3,2,2}^{[\tilde{T}_l]}$ ,  $l = 1, \dots, \lambda_m$ , eindeutig bestimmt. Die  $C^2$ -Bedingung über  $e_{m,n_m}$ , sowie die Koeffizienten  $a_{i,j,k}^{[T_{m,n_m}]}$ ,  $(i, j, k) \in \{(5, 0, 2); (4, 0, 3); (3, 0, 4); (4, 1, 2); (3, 2, 2)\}$ , und  $a_{3,2,2}^{[\tilde{T}_{\lambda_m}]}$  implizieren nach Korollar 2.9 schließlich die Eindeutigkeit von  $a_{3,1,3}^{[T_{m,n_m}]}$ . Somit sind auch auf dem Dreieck  $T_{m,n_m}$  alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten eindeutig bestimmt. Also ist  $\mathcal{M}_m^{(7)}$  eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta_m)$  und damit induktiv  $\mathcal{M}^{(7)}$  eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .

Wie in [55], Theorem 5 gezeigt, ist bei der Konstruktion der Subtriangulierungen  $\Delta_m$ ,  $m = 0, \dots, n$ , eine Kante  $e_{m,j}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_m - 1\}$ , genau dann im Knoten  $v_{m,j}$  degeneriert, wenn der Knoten  $v_{m,j}$  einem Knoten  $v_{k,l}$ ,  $l \in \{0, n_k\}$ , für ein  $k < m$  entspricht, der semisingulär bzgl.  $\Delta_k$  ist. In  $\mathcal{M}^{(7)}$  liegen daher folgende Bézier-Bernstein-Punkte der Triangulierung:

- 36 Punkte im Startdreieck,
- 13 Punkte für jeden hinzugefügten Knoten von  $\Delta$ , und
- 1 Punkt für jeden singulären Knoten.

Also gilt mit den Formeln von Euler:

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)) &= \#\mathcal{M}^{(7)} = 36 + 13(\#V(\Delta) - 3) + \sigma(\Delta) \\ &= 10\#V(\Delta) - 3\#N(\Delta) + 3\#E(\Delta) + \sigma(\Delta). \end{aligned}$$

#

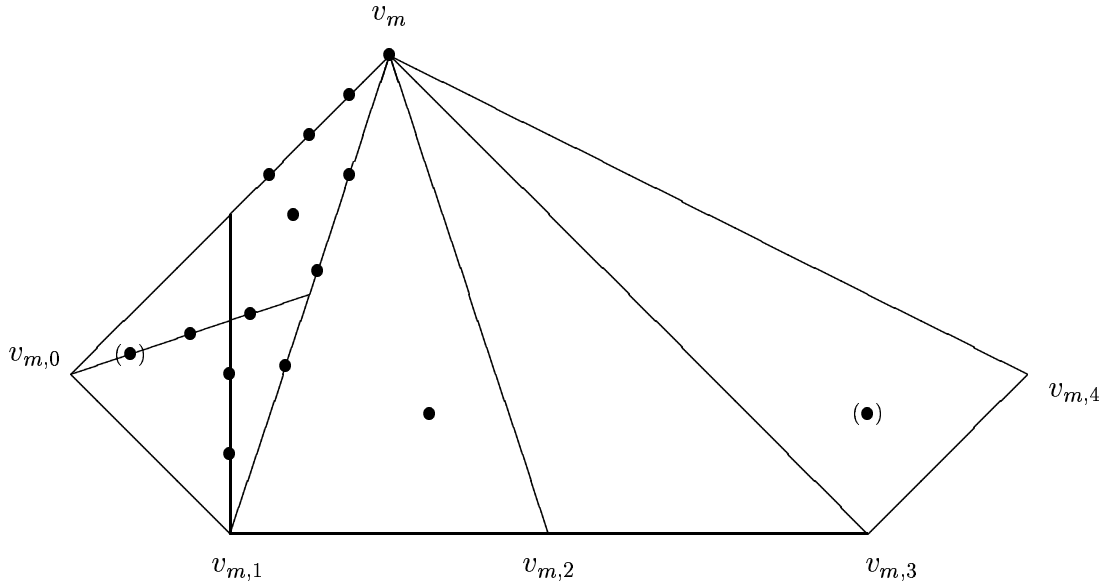
## 7.2.2 Lagrange-Interpolation

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung, zerlegt wie in Abschnitt 7.1 beschrieben. Wir konstruieren nun induktiv Lagrange-Interpolationsmengen für den Splineraum  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .

Im Startdreieck  $T$  wählen wir eine Menge  $\mathcal{L}_0^{(7)}$  von 36 Punkten zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_7$ . Dies sind z.B. für  $i = 1, \dots, 8$  genau  $i$  Punkte auf  $l_i$  für acht parallele Strecken  $l_1, \dots, l_8$  auf  $T$ . Seien für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  die Interpolationspunkte auf  $\Omega_{m-1}$  bereits konstruiert, dann wählen wir auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$  die Punkte  $\mathcal{L}_m^{(7)} \setminus \mathcal{L}_{m-1}^{(7)}$  wie folgt (vgl. Abbildung 52):

- $v_m$ , je drei Punkte im Innern von  $e_{m,0}$  und  $e_{m,1}$ ,  $2 + c_{m,0}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,0}, \frac{v_m + v_{m,1}}{2}]$ ,  $1 + c_{m,1}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,1}, \frac{v_m + v_{m,0}}{2}]$  und einen auf keiner dieser Strecken liegenden Punkt im Innern von  $T_{m,1}$ ,
- für  $j = 2, \dots, n_m - 1$  einen Punkt im Innern von  $T_{m,j}$ , falls  $c_{m,j} = 1$ , und
- einen Punkt im Innern von  $T_{m,n_m}$ , falls  $(c_{m,n_m} = 1, \tau_m = 1)$ .



Abb. 52: Mögliche Interpolationspunkte  $\mathcal{L}_m^{(7)} \setminus \mathcal{L}_{m-1}^{(7)}$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ .**Theorem 7.5:**

Sei  $\Delta$  beliebig. Dann ist  $\mathcal{L}^{(7)} = \mathcal{L}_n^{(7)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion gilt  $\#\mathcal{L}^{(7)} = \#\mathcal{M}^{(7)} = \dim(\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta))$ . Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$  für alle  $T \in \Delta$ , und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}^{(7)}$ .

Die Interpolationspunkte im Startdreieck  $T$  bilden eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{P}_7$ . Daher gilt  $s|_T \equiv 0$ . Sei jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{m-1}} \equiv 0$ , dann betrachten wir  $s$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ . Die  $C^2$ -Stetigkeit über  $[v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und die Supersplineeigenschaft in den Knoten von  $\Delta$  implizieren  $D^w s(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z \in [v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , sowie  $D^3 s(v_{m,l}) \equiv 0$  für  $l = 0, \dots, n_m$ .

Auf dem Dreieck  $T_{m,1}$  folgt aus den Interpolationspunkten auf  $e_{m,l}$ ,  $l = 0, 1$ , dass  $s|_{e_{m,l}} \equiv 0$ ,  $l = 0, 1$ . Daher gibt es ein Polynom  $q_2^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{P}_2$ , so dass sich  $p^{[T_{m,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,1}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q_2^{[T_{m,1}]}(z), \quad z \in T_{m,1},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,0}, v_{m,1}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$  für  $j = 1, 2$  eine Gerade durch  $e_{m,j-2}$  ist. Im Folgenden sei  $d_{m,j}$ ,  $j = 0, \dots, n_m$ , ein Einheitsvektor entlang  $e_{m,j}$  und  $\tilde{d}_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j \leq n_m$ , ein Einheitsvektor entlang  $[v_{m,i}, v_{m,j}] \in E(\Delta)$ . Im Fall  $c_{m,1} = 0$  berechnet sich aus den Ableitungen  $p_{\tilde{d}_{1,0}(-d_{m,1})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$ ,  $p_{\tilde{d}_{1,2}(-d_{m,1})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  und  $p_{(-d_{m,1})^4}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  nach Lemma 2.6 die partielle Ableitung  $p_{\tilde{d}_{1,0}(-d_{m,1})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  zu Null. Dies impliziert  $D^4 p^{[T_{m,1}]}(v_{m,1}) \equiv 0$  und damit  $q_2^{[T_{m,1}]}(v_{m,1}) = 0$ . Falls  $c_{m,0} = 0$ , so ist  $v_{m,0}$  semisingulär bzgl.  $\Delta_m$ , und aus  $s|_{\Omega_{m-1}} \equiv 0$  folgt  $p_{d^2(-d_{m,0})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) = 0$  für einen Einheitsvektor  $d$  entlang der benachbarten Kante

von  $e_{m,0}$  im Knoten  $v_{m,0}$ . Analog der Argumentation für den Knoten  $v_{m,1}$  impliziert dies  $D^4 p^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) \equiv 0$ , also  $q_2^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) = 0$ , falls  $c_{m,0} = 0$ . Mit den Interpolationspunkten im Innern der Strecken  $[v_{m,0}, \frac{v_m + v_{m,1}}{2}]$  und  $[v_{m,1}, \frac{v_m + v_{m,0}}{2}]$  gibt es daher ein Polynom  $q_0^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,1}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot q_0^{[T_{m,1}]}(z), \quad z \in T_{m,1},$$

wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$  für  $j = 4, 5$  eine Gerade durch die Strecke  $[v_{m,0}, \frac{v_m + v_{m,1}}{2}]$  bzw.  $[v_{m,1}, \frac{v_m + v_{m,0}}{2}]$  ist. Aus dem Interpolationspunkt im Innern von  $T_{m,1}$  folgt schließlich  $q_0^{[T_{m,1}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{m,1}]} \equiv 0$ .

Wir betrachten nun induktiv die Dreiecke  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m - 1$ . Mit der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_{m,l-1}$  und  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  sowie der Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_m$  und  $v_{m,l}$  existiert ein Polynom  $q_0^{[T_{m,l}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,l}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,l}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_0^{[T_{m,l}]}(z), \quad z \in T_{m,l},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,l+j-3}$  ist. Mit gleicher Argumentation wie auf dem Dreieck  $T_{m,1}$  folgt  $p_{\tilde{d}_{l,l-1}(-d_{m,l})^3}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l}) = 0$ , falls  $c_{m,l} = 0$ . Für  $c_{m,l} = 1$  gibt es einen weiteren Interpolationspunkt im Innern von  $T_{m,l}$ . Beides impliziert jeweils  $q_0^{[T_{m,l}]} \equiv 0$  und folglich  $p^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ .

Es verbleibt das Dreieck  $T_{m,n_m}$ . Analog der Argumentation für  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m$ , gibt es ein Polynom  $q_0^{[T_{m,n_m}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,n_m}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,n_m}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_0^{[T_{m,n_m}]}(z), \quad z \in T_{m,n_m},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,n_m-1}, v_{m,n_m}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,n_m+j-3}$  ist. Im Fall  $\tau_m = 1$  folgt wie für  $p_{\tilde{d}_{1,0}(-d_{m,1})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  auf dem Dreieck  $T_{m,1}$ , dass die partielle Ableitung  $p_{\tilde{d}_{n_m,n_m-1}(-d_{m,n_m})^3}^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m})$  verschwindet ( $c_{m,n_m} = 0$ ) oder ein zusätzlicher Interpolationspunkt im Innern von  $T_{m,n_m}$  liegt ( $c_{m,n_m} = 1$ ). Dies impliziert  $q_0^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m}) = 0$  und damit  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Für  $\tau_m = 0$  gilt nach Voraussetzung  $c_{m,n_m} = 1$ , und es gibt  $\lambda_m \in \{2, 3\}$  Dreiecke  $\tilde{T}_l = \Delta(v_m, w_{l-1}, w_l) \in \Delta \setminus \Delta_m$ ,  $l = 1, \dots, \lambda_m$ , mit  $w_0 = v_{m,0}$  und  $w_{\lambda_m} = v_{m,n_m}$ , wobei die Kanten  $[w_l, v_m]$ ,  $l = 1, \dots, \lambda_m - 1$ , in  $v_m$  degeneriert sind. Mit der  $C^2$ -Stetigkeit über diesen Kanten folgt  $p_{\tilde{d}_{l-1}^2 \tilde{d}_l^2}^{[\tilde{T}_l]}(v_m) = 0$  für  $l = 1, \dots, \lambda_m$ , wobei  $\tilde{d}_l$  für  $l = 1, \dots, \lambda_m$ , ein Einheitsvektor entlang  $[v_m, w_l]$  ist. Daher impliziert die  $C^2$ -Stetigkeit über der Kante  $e_{m,n_m}$  sowie  $p_{\tilde{d}_{m,n_m}^4}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = p_{\tilde{d}_{m,n_m}^2 \tilde{d}_{m,n_m-1}^2}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$  nach Lemma 2.6, dass  $p_{\tilde{d}_{m,n_m}^3 \tilde{d}_{m,n_m-1}}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$ . Hieraus folgt  $q_0^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$  und schließlich  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt  $s|_{\Omega_m} \equiv 0$  und induktiv  $s \equiv 0$ .

#

### 7.2.3 Hermite-Interpolation

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung, zerlegt wie in Abschnitt 7.1 beschrieben. Wir konstruieren nun Hermite-Interpolationsmengen für den Splineraum  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .

Sei  $f \in C(\Omega)$  eine genügend oft differenzierbare Funktion und  $d_i$  für  $i = 1, \dots, 3$ ,  $d_0 = d_3$ , ein Einheitsvektor entlang der Kante  $e_i := [w_i, w_{i+1}]$ ,  $w_4 := w_1$ , des Startdreiecks  $T = \Delta(w_1, w_2, w_3)$ . Dann setzen wir  $\mathcal{H}_0^{(7)}$  eine Menge von 36 Interpolationsbedingungen, die den interpolierenden Spline  $s \in \mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  auf  $T$  eindeutig festlegen. Dies sind z.B.

- $D^w s(w_i) = D^w f(w_i)$ ,  $w = 0, \dots, 3$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , und
- $s_{d_i^2(-d_{i-1})^2}(w_i) = f_{d_i^2(-d_{i-1})^2}(w_i)$ ,  $s_{d_i^3(-d_{i-1})}(w_i) = f_{d_i^3(-d_{i-1})}(w_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

Sei jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  die Menge  $\mathcal{H}_{m-1}^{(7)}$  bereits konstruiert, dann wählen wir auf den Dreiecken von  $\Delta_m \setminus \Delta_{m-1}$  die Bedingungen  $\mathcal{H}_m^{(7)} \setminus \mathcal{H}_{m-1}^{(7)}$  im Knoten  $v_m$ . Sei wieder  $d_{m,j}$  für  $j = 0, \dots, n_m$  ein Einheitsvektor entlang  $e_{m,j} = [v_m, v_{m,j}]$ . Wir setzen  $\mathcal{H}_m^{(7)} \setminus \mathcal{H}_{m-1}^{(7)}$ :

- $D^w s(v_m) = D^w f(v_m)$ , für  $w = 0, \dots, 3$ ,
- $s_{d_{m,0}^2 d_{m,1}^2}(v_m) = f_{d_{m,0}^2 d_{m,1}^2}(v_m)$ ,
- $s_{d_{m,j-1} d_{m,j}^3}(v_m) = f_{d_{m,j-1} d_{m,j}^3}(v_m)$  für alle  $j \in \{1, \dots, n_m - 1\}$  mit  $c_j = 1$ ,
- $s_{d_{m,0}^3 d_{m,1}}(v_m) = f_{d_{m,0}^3 d_{m,1}}(v_m)$ , falls  $c_{m,0} = 1$ , und
- $s_{d_{m,n_m-1} d_{m,n_m}^3}(v_m) = f_{d_{m,n_m-1} d_{m,n_m}^3}(v_m)$ , falls  $(c_{m,n_m} = 1, \tau_m = 1)$ .

#### Theorem 7.6:

Sei  $\Delta$  beliebig. Dann ist  $\mathcal{H}^{(7)} = \mathcal{H}_n^{(7)}$  eine Hermite-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$ .

#### Beweis:

Nach Konstruktion gilt  $\#\mathcal{H}^{(7)} = \#\mathcal{M}^{(7)} = \dim(\mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta))$ . Daher reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Seien also  $s \in \mathcal{S}_7^{2,3}(\Delta)$  mit  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_7$  für alle  $T \in \Delta$  und  $f \equiv 0$  gegeben. Ferner sei wieder  $\tilde{d}_{i,j}$ ,  $i, j = 0, \dots, n_m$ , ein Einheitsvektor entlang  $[v_{m,i}, v_{m,j}] \in E(\Delta)$ . Die Interpolationsbedingungen auf dem Startdreieck  $T$  implizieren  $p^{[T]} \equiv s|_{\Omega_0} \equiv 0$ . Sei jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{m-1}} \equiv 0$ , dann betrachten wir  $s$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ .

Die  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten  $[v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und die Supersplineeigenschaft in den Knoten von  $\Delta$  implizieren  $D^w s(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z \in [v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , sowie  $D^3 s(v_{m,l}) \equiv 0$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ . Mit  $D^w s(v_m) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 3$ , folgt daraus insbesondere  $s|_{e_{m,l}} \equiv 0$  für  $l = 0, \dots, n_m$ .

Im Dreieck  $T_{m,1}$  interpoliert für  $c_{m,1} = 1$  die partielle Ableitung  $p_{d_{m,0} d_{m,1}^3}^{[T_{m,1}]}(v_m) = 0$ . Mit der Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_m$  und  $v_{m,1}$  impliziert dies  $p_{d_{1,0}(-d_{m,1})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1}) = 0$

(vgl. Lemma 6.9). Gilt dagegen  $c_{m,1} = 0$ , so lässt sich  $p_{\tilde{d}_{1,0}(-d_{m,1})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  aus den Ableitungen  $p_{\tilde{d}_{1,0}^2(-d_{m,1})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$ ,  $p_{\tilde{d}_{1,2}^2(-d_{m,1})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  und  $p_{(-d_{m,1})^4}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  nach Lemma 2.6 Null berechnen. Im Fall  $c_{m,0} = 1$  interpoliert die partielle Ableitung  $p_{\tilde{d}_{m,0}^3 d_{m,1}}^{[T_{m,1}]}(v_m) = 0$ . Aus der Superspline-eigenschaft in  $v_m$  und  $v_{m,0}$  folgt  $p_{\tilde{d}_{0,1}(-d_{m,0})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) = 0$  (vgl. Lemma 6.9). Für  $c_{m,0} = 0$  ist  $v_{m,0}$  semisingulär bzgl.  $\Delta_m$  und  $p_{\tilde{d}_{0,1}(-d_{m,0})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0})$  lässt sich mithilfe der Ableitungen  $p_{(-d_{m,0})^4}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0})$ ,  $p_{\tilde{d}_{0,1}^2(-d_{m,0})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0})$  und  $p_{d^2(-d_{m,0})^2}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0})$  nach Lemma 2.6 Null berechnen. Dabei ist  $d$  ein Einheitsvektor entlang der benachbarten Kante von  $e_{m,0}$  im Knoten  $v_{m,0}$ . Folglich gibt es auf dem Dreieck  $T_{m,1}$  ein Polynom  $q_0^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,1}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^2(z) \cdot l_3^2(z) \cdot q_0^{[T_{m,1}]}(z), \quad z \in T_{m,1},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,0}, v_{m,1}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,j-2}$  ist. Aus  $p_{\tilde{d}_{m,0}^2 \tilde{d}_{m,1}}^{[T_{m,1}]}(v_m) = 0$  folgt  $q_0^{[T_{m,1}]}(v_m) = 0$  und damit  $p^{[T_{m,1}]} \equiv 0$ .

Wir betrachten jetzt induktiv die Dreiecke  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m - 1$ . Aus der  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_{m,l-1}$  folgt  $D^w p^{[T_{m,l}]}(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z \in e_{m,l-1}$ . Also gibt es ein Polynom  $q_0^{[T_{m,l}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,l}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,l}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_0^{[T_{m,l}]}(z), \quad z \in T_{m,l},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,l+j-3}$  ist. Mit analogem Argument wie für  $p_{\tilde{d}_{1,0}(-d_{m,1})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1})$  im Dreieck  $T_{m,1}$  folgt  $p_{\tilde{d}_{l,l-1}(-d_{m,l})^3}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l}) = 0$ . Dies impliziert  $q_0^{[T_{m,l}]}(v_m) = 0$  und damit  $p^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ .

Es verbleibt das Dreieck  $T_{m,n_m}$ . Aus der  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_{m,n_m-1}$  folgt  $D^w p^{[T_{m,n_m}]}(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z \in e_{m,n_m-1}$ . Daher gibt es ein Polynom  $q_0^{[T_{m,n_m}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p^{[T_{m,n_m}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,n_m}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_0^{[T_{m,n_m}]}(z), \quad z \in T_{m,n_m},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,n_m-1}, v_{m,n_m}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,n_m+j-3}$  ist. Im Fall  $\tau_m = 1$  folgt wie für  $p_{\tilde{d}_{0,1}(-d_{m,0})^3}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0})$  auf  $T_{m,1}$ , dass die partielle Ableitung  $p_{\tilde{d}_{n_m,n_m-1}^3(-d_{m,n_m})^3}^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m}) = 0$  interpoliert ( $c_{m,n_m} = 1$ ) oder berechnet werden kann ( $c_{m,n_m} = 0$ ). Dies impliziert  $q_0^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m}) = 0$  und damit  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Für  $\tau_m = 0$  ergibt sich  $p_{\tilde{d}_{m,n_m}^3 d_{m,n_m-1}}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$  analog dem Beweis von 7.5. Daraus folgt  $q_0^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$ , also ebenfalls  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt  $s|_{\Omega_m} \equiv 0$  und damit induktiv  $s \equiv 0$ .

#

## 7.3 Interpolation mit $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ , $q \geq 8$

In diesem Abschnitt konstruieren wir Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 8$ . Dabei ist keine Modifikation von  $\Delta$  notwendig. Nach Ibrahim und Schumaker [78] ist die Dimension von  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 8$ , auf beliebigen  $\Delta$  bekannt. Für  $q \geq 8$  gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)) = 10\#V(\Delta) + \left(\binom{q-7}{2} - 3\right)\#N(\Delta) + (3q - 18)\#E(\Delta) + \sigma(\Delta).$$

### 7.3.1 Lagrange-Interpolation

Sei  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung, zerlegt wie in Abschnitt 7.1 beschrieben. Dann wählen wir für  $q \geq 8$  auf dem Startdreieck  $T$  eine Menge  $\mathcal{L}_0^{(q)}$  von  $\binom{q+2}{2}$  Punkten zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_q$ . Dies sind z.B. für  $i = 1, \dots, q+1$  genau  $i$  Punkte auf der Strecke  $l_i$  für  $q+1$  parallele Strecken  $l_1, \dots, l_{q+1}$  auf  $T$ . Seien jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  die Interpolationspunkte auf  $\Omega_{m-1}$  bereits konstruiert, dann wählen wir die Menge der Punkte  $\mathcal{L}_m^{(q)} \setminus \mathcal{L}_{m-1}^{(q)}$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$  wie folgt (vgl. Abbildung 53):

- Auf dem Dreieck  $T_{m,1}$ 
  - $v$  und je  $q-4$  Punkte im Innern von  $e_{m,0}$  und  $e_{m,1}$ ,
  - $q-5+c_{m,0}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,0}, \frac{v_m+v_{m,1}}{2}]$ ,
  - $q-6+c_{m,1}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,1}, \frac{v_m+v_{m,0}}{2}]$  und
  - $\binom{q-5}{2}$  nicht auf diesen Strecken liegende Punkte im Innern von  $T_{m,1}$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-7}$ .
- Auf den Dreiecken  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m - 1$ 
  - $q-7$  Punkte im Innern von  $e_{m,l}$ ,
  - $q-7+c_{m,l}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,l}, \frac{v_m+v_{m,l-1}}{2}]$  und
  - $\binom{q-6}{2}$  nicht auf dieser Strecke liegende Punkte im Innern von  $T_{m,l}$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-8}$ .
- Auf dem Dreieck  $T_{m,n_m}$ 
  - $q-7$  Punkte im Innern von  $e_{m,n_m}$ ,
  - $q-7+c_{m,n_m}$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_{m,n_m}, \frac{v_m+v_{m,n_m-1}}{2}]$ ,
  - $q-8+\tau_m$  Punkte im Innern der Strecke  $[v_m, \frac{v_{m,n_m-1}+v_{m,n_m}}{2}]$  und
  - $\binom{q-7}{2}$  nicht auf diesen Strecken liegende Punkte im Innern von  $T_{m,n_m}$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-9}$ , falls  $q \geq 9$ .

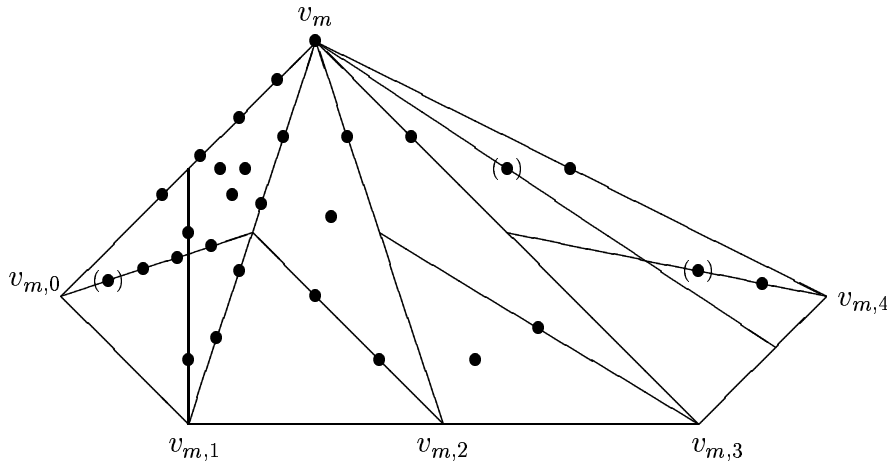


Abb. 53: Mögliche Lagrange-Punkte auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$  für  $q = 8$ .

**Theorem 7.7:**

Sei  $q \geq 8$ ,  $\Delta$  beliebig. Dann ist  $\mathcal{L}^{(q)} = \mathcal{L}_n^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ .

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass die Anzahl der gewählten Punkte mit der Dimension des interpolierenden Splineraums übereinstimmt. In  $\mathcal{L}^{(q)}$  enthalten sind:

- $\binom{q+2}{2}$  Punkte auf dem Startdreieck,
- $\binom{q-4}{2} - 3$  Punkte auf jedem hinzugefügten Dreieck,
- $10 + 3(q - 6)$  weitere Punkte auf  $T_{k,1} \cup T_{k,n_k}$ , für jeden angehängten Knoten  $v_k$ , und
- ein Punkt für jeden singulären Knoten.

Mit den Formeln von Euler ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \#\mathcal{L}^{(q)} &= \binom{q+2}{2} + \left[ \binom{q-4}{2} - 3 \right] (\#N(\Delta) - 1) + [10 + 3(q - 6)] (\#V(\Delta) - 3) + \sigma(\Delta) \\
 &= (q^2 - 6q + 6) \#V_I(\Delta) + \frac{1}{2}(q^2 - 3q - 2) \#V_B(\Delta) - (q^2 - 6q - 4) + \sigma(\Delta) \\
 &= 10 \#V(\Delta) + \left[ \binom{q-7}{2} - 3 \right] \#N(\Delta) + 3(q - 6) \#E(\Delta) + \sigma(\Delta) \\
 &= \dim(\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)).
 \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T = p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta$ , und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}^{(q)}$ .

Die Interpolationspunkte im Startdreieck bilden eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{P}_q$ . Dies impliziert  $s|_T \equiv 0$ . Sei nun für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{m-1}} \equiv 0$ , dann betrachten wir  $s$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ . Die  $C^2$ -Stetigkeit über  $[v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und die Supersplineeigenschaft in den Knoten von  $\Delta$  implizieren  $D^w s(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für

alle  $z \in [v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , sowie  $D^3 s(v_{m,l}) \equiv 0$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ .

Auf dem Dreieck  $T_{m,1}$  folgt aus den Interpolationspunkten auf  $e_{m,l}$ ,  $l = 0, 1$ , dass  $p_{|e_{m,l}}^{[T_{m,1}]} \equiv 0$ ,  $l = 0, 1$ . Daher gibt es ein Polynom  $q_{q-5}^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,1}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot q_{q-5}^{[T_{m,1}]}(z), \quad z \in T_{m,1},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,0}, v_{m,1}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,j-2}$  ist. Mit analogem Beweis wie im Fall  $q = 7$  folgt für  $c_{m,1} = 0$   $D^4 p^{[T_{m,1}]}(v_{m,1}) \equiv 0$  und damit  $q_{q-5}^{[T_{m,1}]}(v_{m,1}) = 0$ , sowie für  $c_{m,0} = 0$ , dass  $D^4 p^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) \equiv 0$  und damit  $q_{q-5}^{[T_{m,1}]}(v_{m,0}) = 0$ . Zusammen mit den Interpolationspunkten im Innern der Strecken  $[v_{m,0}, \frac{v_m + v_{m,1}}{2}]$  und  $[v_{m,1}, \frac{v_m + v_{m,0}}{2}]$  gibt es daher ein Polynom  $q_{q-7}^{[T_{m,1}]} \in \mathcal{P}_{q-7}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,1}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot q_{q-7}^{[T_{m,1}]}(z), \quad z \in T_{m,1},$$

wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 4, 5$  eine Gerade durch die Strecke  $[v_{m,0}, \frac{v_m + v_{m,1}}{2}]$  bzw.  $[v_{m,1}, \frac{v_m + v_{m,0}}{2}]$  ist. Die Interpolationspunkte im Innern von  $T_{m,1}$  implizieren schließlich  $q_{q-7}^{[T_{m,1}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{m,1}]} \equiv 0$ .

Wir betrachten nun induktiv die Dreiecke  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m - 1$ . Die Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_m$  und  $v_{m,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_m$ , sowie die Interpolationspunkte auf  $e_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m$ , implizieren  $s_{|e_{m,l}} \equiv 0$ ,  $l = 2, \dots, n_m$ . Wegen der  $C^2$ -Stetigkeit über  $e_{m,l-1}$  und  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  gibt es ein Polynom  $q_{q-7}^{[T_{m,l}]} \in \mathcal{P}_{q-7}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,l}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,l}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_{q-7}^{[T_{m,l}]}(z), \quad z \in T_{m,l},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,l+j-3}$  ist. Für  $c_{m,l} = 0$  folgt nach Lemma 2.6 wie im Fall  $q = 7$ , dass  $p_{\tilde{d}_{l,l-1}(-d_{m,l})^3}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l}) = 0$  für einen Einheitsvektor  $\tilde{d}_{l,l-1}$  entlang  $[v_{m,l}, v_{m,l-1}]$ , und damit  $q_{q-7}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l}) = 0$ . Für  $c_{m,l} = 1$  liegt ein weiterer Interpolationspunkt im Innern der Strecke  $[v_{m,l}, \frac{v_m + v_{m,l-1}}{2}]$ . In beiden Fällen existiert mit den Interpolationspunkten auf  $[v_{m,l}, \frac{v_m + v_{m,l-1}}{2}]$  ein Polynom  $q_{q-8}^{[T_{m,l}]} \in \mathcal{P}_{q-8}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,l}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,l}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot q_{q-8}^{[T_{m,l}]}(z), \quad z \in T_{m,l},$$

wobei  $g_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_4(x, y) = a_4x + b_4y + c_4 = 0\}$  eine Gerade durch die Strecke  $[v_{m,l}, \frac{v_m + v_{m,l-1}}{2}]$  ist. Die Interpolationspunkte im Innern von  $T_{m,l}$  implizieren  $q_{q-8}^{[T_{m,l}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ .

Es verbleibt das Dreieck  $T_{m,n_m}$ . Analog der Argumentation für  $T_{m,l}$ ,  $l = 2, \dots, n_m$ , gibt es ein Polynom  $q_{q-7}^{[T_{m,n_m}]} \in \mathcal{P}_{q-7}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,n_m}]}$  schreiben als

$$p^{[T_{m,n_m}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot q_{q-7}^{[T_{m,n_m}]}(z), \quad z \in T_{m,n_m},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,n_m-1}, v_{m,n_m}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,n_m+j-3}$  ist. Gilt  $\tau_m = 0$ , so folgt aus der Semisingularität von  $v_m$  und der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten mit Endpunkt  $v_m$  nach Lemma 2.6 wie im Fall  $q = 7$ , dass  $p_{d_{m,n_m-1}d_{m,n_m}^3}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$ . Im Fall  $c_{m,n_m} = 0$  folgt analog der Argumentation für  $c_{m,0} = 0$  auf  $T_{m,1}$ , dass  $D^4 p^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m}) \equiv 0$  und damit  $q_{q-7}^{[T_{m,n_m}]}(v_{m,n_m}) = 0$ . Für  $\tau_m = 1$  liegt ein zusätzlicher Interpolationspunkt im Innern der Strecke  $[v_m, \frac{v_{m,n_m-1}+v_{m,n_m}}{2}]$ , für  $c_{m,n_m} = 1$  ein zusätzlicher Punkt im Innern von  $[v_{m,n_m}, \frac{v_m+v_{m,n_m-1}}{2}]$ . Gilt  $q = 8$ , so impliziert dies  $q_{q-7}^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ , also  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Für  $q \geq 9$  liegen weitere  $q - 8$  Interpolationspunkte im Innern der Strecke  $[v_m, \frac{v_{m,n_m-1}+v_{m,n_m}}{2}]$ , weshalb ein Polynom  $q_{q-9}^{[T_{m,n_m}]} \in \mathcal{P}_{q-9}$  existiert, so dass sich  $p^{[T_{m,n_m}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,n_m}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3(z) \cdot l_4(z) \cdot l_5(z) \cdot q_{q-9}^{[T_{m,n_m}]}(z), \quad z \in T_{m,n_m},$$

wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 4, 5$  eine Gerade durch die Strecke  $[v_m, \frac{v_{m,n_m-1}+v_{m,n_m}}{2}]$  bzw.  $[v_{m,n_m}, \frac{v_m+v_{m,n_m-1}}{2}]$  ist. Aus den Interpolationspunkten im Innern von  $T_{m,n_m}$  folgt schließlich  $q_{q-9}^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$  und somit  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt  $s|_{\Omega_m} \equiv 0$ , also induktiv  $s \equiv 0$ .

#

### 7.3.2 Hermite-Interpolation

Sei  $q \geq 8$  und  $\Delta$  eine beliebige Triangulierung, zerlegt wie in Abschnitt 7.1 beschrieben. Wir konstruieren nun Hermite-Interpolationsmengen für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ .

Sei  $f \in C(\Omega)$  eine genügend oft differenzierbare Funktion und  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , ein Einheitsvektor entlang der Kante  $e_i := [w_i, w_{i+1}]$ ,  $w_4 := w_1$ , des Startdreiecks  $T = \Delta(w_1, w_2, w_3)$ . Wir setzen  $\mathcal{H}_0^{(q)}$  eine Menge von  $\binom{q+2}{2}$  Interpolationsbedingungen, die den interpolierenden Spline  $s \in \mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$  auf  $T$  eindeutig festlegen. Dies sind z.B.

- $D^w s(w_1) = D^w f(w_1)$ ,  $w = 0, \dots, [\frac{q}{2}]$ ,
- $s_{(-d_1)^j d_2^k}(w_2) = f_{(-d_1)^j d_2^k}(w_2)$  für  $j = 0, \dots, [\frac{q-1}{2}]$ ,  $k \geq 0$ , wobei  $j + k \leq [\frac{q}{2}]$ , und
- $s_{(-d_2)^j d_3^k}(w_3) = f_{(-d_2)^j d_3^k}(w_3)$  für  $j, k = 0, \dots, [\frac{q-1}{2}]$ .

Dabei ist  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ . Sei jetzt  $\mathcal{H}_{m-1}^{(q)}$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , bereits konstruiert, dann wählen wir im Knoten  $v_m$  die Bedingungen  $\mathcal{H}_m^{(q)} \setminus \mathcal{H}_{m-1}^{(q)}$ . Sei wieder  $d_{m,j}$ ,  $j = 0, \dots, n_m$ , ein Einheitsvektor entlang  $e_{m,j}$ . Wir setzen  $\mathcal{H}_m^{(q)} \setminus \mathcal{H}_{m-1}^{(q)}$  (vgl. Abbildung 54):

- $D^w p^{[T_{m,1}]}(v_m) = D^w f(v_m)$ ,  $w = 0, \dots, q - 4$ ,
- $s_{d_{m,0}^k d_{m,1}^l}(v_m) = f_{d_{m,0}^k d_{m,1}^l}(v_m)$  für  $k, l \geq 2$ ,  $k + l = q - 3$ ,



- $s_{d_{m,j-1}^k d_{m,j}^l}(v_m) = f_{d_{m,j-1}^k d_{m,j}^l}(v_m)$  für  $l \geq 3$ ,  $4 \leq k+l \leq q-3$ ,  $(k,l) \notin \{(0, q-3); (1, q-4)\}$ ,  $l = 2, \dots, n_m$ ,  $(k, l, j) \neq (1, 3, n_m)$ ,
- $s_{d_{m,0}^{q-4} d_{m,1}}(v_m) = f_{d_{m,0}^{q-4} d_{m,1}}(v_m)$  bzw.  $s_{d_{m,j-1}^{q-4} d_{m,j}}(v_m) = f_{d_{m,j-1}^{q-4} d_{m,j}}(v_m)$ , falls  $c_{m,0} = 1$  bzw.  $c_{m,j} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n_m$ , und
- $s_{d_{m,n_m-1} d_{m,n_m}^3}(v_m) = f_{d_{m,n_m-1} d_{m,n_m}^3}(v_m)$ , falls  $\tau_m = 1$ .

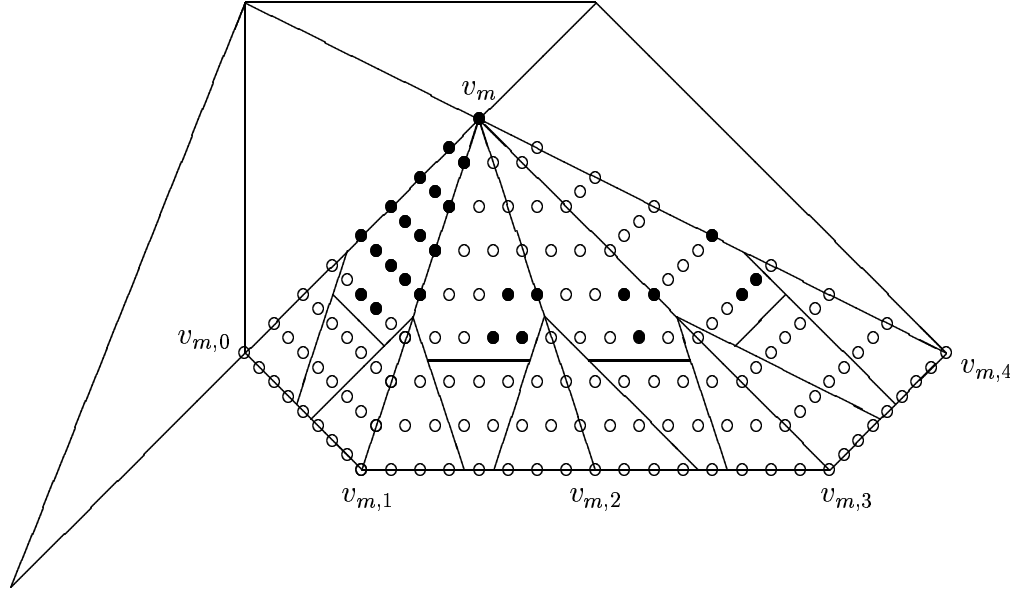


Abb. 54: Hermite-Bedingungen  $\mathcal{H}_m^{(8)} \setminus \mathcal{H}_{m-1}^{(8)}$  im Knoten  $v_m$ .

**Theorem 7.8:**

Sei  $q \geq 8$ ,  $\Delta$  beliebig. Dann ist  $\mathcal{H}^{(q)} = \mathcal{H}_n^{(q)}$  eine Hermite-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion gilt  $\#\mathcal{H}^{(q)} = \#\mathcal{L}^{(q)} = \dim(\mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta))$ . Daher reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Seien also  $s \in \mathcal{S}_q^{2,3}(\Delta)$ , gegeben durch  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta$ , und  $f \equiv 0$ .

Die Interpolationsbedingungen im Startdreieck  $T$  implizieren  $p^{[T]} \equiv s|_{\Omega_0} \equiv 0$ . Sei jetzt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{m-1}} \equiv 0$ , dann betrachten wir  $s$  auf  $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$ .

Die  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten  $[v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und die Supersplineeigenschaft in den Knoten von  $\Delta$  implizieren  $D^w s(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z \in [v_{m,l}, v_{m,l+1}]$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , sowie  $D^3 s(v_{m,l}) \equiv 0$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ . Aus  $D^w s(v_m) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 3$ , und den Interpolationsbedingungen im Innern von  $e_{m,l}$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ , folgt daraus insbesondere  $s|_{e_{m,l}} \equiv 0$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ .

Analog dem Fall  $q = 7$  sind für  $q \geq 8$  die partiellen Ableitungen  $p_{(-d_{m,l})^3 \tilde{d}_{l,l+1}}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l})$ ,  $l = 0, \dots, n_m - 1$ , und  $p_{\tilde{d}_{l,l-1}(-d_{m,l})^3}^{[T_{m,l}]}(v_{m,l})$ ,  $l = 1, \dots, n_m$ , entweder durch die homogenen

Interpolationsbedingungen gegeben ( $c_{m,l} = 1$ ) oder lassen sich mit der  $C^2$ -Stetigkeit über den Kanten  $e_{m,l}$ ,  $l = 0, \dots, n_m$ , nach Lemma 2.6 Null berechnen ( $c_{m,l} = 0$ ). Dabei ist  $\tilde{d}_{i,j}$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_{m,i}, v_{m,j}] \in E(\Delta)$ .

Für  $l = 1, \dots, n_m - 1$  implizieren die Interpolationsbedingungen in den Knoten  $v_m$ ,  $v_{m,l-1}$  und  $v_{m,l}$  daher  $D^w p^{[T_{m,l}]}(z) \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, 2$ , für alle  $z$  auf einer Kante von  $T_{m,l}$ . Im Fall  $q = 8$  folgt daraus  $p^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ , für  $q \geq 9$  folgt die Existenz eines Polynoms  $q_{q-9}^{[T_{m,l}]} \in \mathcal{P}_{q-9}$ , so dass sich  $p^{[T_{m,l}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{m,l}]}(z) = l_1^3(z) \cdot l_2^3(z) \cdot l_3^3(z) \cdot q_{q-9}^{[T_{m,l}]}(z), \quad z \in T_{m,l},$$

wobei  $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$  eine Gerade durch  $[v_{m,l-1}, v_{m,l}]$  und  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_jx + b_jy + c_j = 0\}$  für  $j = 2, 3$  eine Gerade durch  $e_{m,l+j-3}$  ist. Aus den verbleibenden Interpolationsbedingungen im Knoten  $v_m$  folgt  $D^w q_{q-9}^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ ,  $w = 0, \dots, q - 9$ , und damit  $q_{q-9}^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ . Dies impliziert  $p^{[T_{m,l}]} \equiv 0$ .

Betrachten wir nun das Dreieck  $T_{m,n_m}$ . Im Fall  $\tau_m = 0$  wird  $p_{d_{m,n_m-1}d_{m,n_m}^3}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$  wie im Beweis für  $q = 7$  berechnet. Für  $\tau_m = 1$  ist  $p_{d_{m,n_m-1}d_{m,n_m}^3}^{[T_{m,n_m}]}(v_m) = 0$  gegeben. Mit gleicher Argumentation wie auf den Dreiecken  $T_{m,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_m - 1$ , gilt damit  $p^{[T_{m,n_m}]} \equiv 0$ . Dies impliziert  $s|_{\Omega_m} \equiv 0$  und schließlich induktiv  $s \equiv 0$ .

#

### Bemerkung 7.9:

Dieses Verfahren zur Lagrange- und Hermite-Interpolation auf beliebigen Triangulierungen lässt sich in einfacher Weise auf  $C^r$ -Splines vom Grad  $\geq 3r + 1$  verallgemeinern. Aufgrund der durch die Zerlegung entstandenen Semisingularitäten muss dabei  $C^{2r-1}$ -Supersplineeigenschaft in den Knoten gelten. Analoge geringfügige Verfeinerungen der Triangulierung in den in Bemerkung 7.3 beschriebenen Ausnahmefällen sind nur bei der Interpolation mit  $\mathcal{S}_{3r+1}^{r,2r-1}(\Delta)$  notwendig.

## Kapitel 8:

# Grundlagen der trivariaten Theorie

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen der trivariaten Splinetheorie. Wir beschreiben Tetraederzerlegungen eines polyederförmigen Gebiets im  $\mathbb{R}^3$  und definieren stückweise Polynome und Splines auf diesen Zerlegungen. Mithilfe der trivariaten baryzentrischen Koordinaten geben wir die Splines in ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung an. Nach de Boor [22] lässt sich die Differenzierbarkeit der Splines über gemeinsame Flächen benachbarter Tetraeder der Zerlegung durch Bedingungen an ihre Koeffizienten charakterisieren. Minimal bestimmende Mengen von Splineräumen sowie für die Hermite-Interpolation der Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen trivariater Polynome und den Koeffizienten ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung (vgl. de Boor [22] und Farin [67]) ergeben sich analog zum bivariaten Fall.

## 8.1 Tetraederzerlegungen

### Definition 8.1:

Sei  $\Omega$  eine einfach zusammenhängende, polyederförmige Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , zerlegt in Tetraeder  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so dass der Durchschnitt zweier verschiedener Tetraeder entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt, eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Dreiecksfläche ist. Dann heißt  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine TETRAEDERZERLEGUNG von  $\Omega$  (vgl. Abbildung 55). Ist  $\Delta' \subset \Delta$  eine Tetraederzerlegung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge  $\Omega' \subset \Omega$ , so heißt  $\Delta'$  SUBTETRAEDERZERLEGUNG von  $\Delta$ .

Wir setzen

$V_I(\Delta)$ , $V_B(\Delta)$ , $V(\Delta)$	: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
$F_I(\Delta)$ , $F_B(\Delta)$ , $F(\Delta)$	: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Flächen,
$E_I(\Delta)$ , $E_B(\Delta)$ , $E(\Delta)$	: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten und
$N(\Delta)$	: Menge der Tetraeder

der Tetraederzerlegung  $\Delta$ . Nach Leonhard Euler gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\#V_B(\Delta) &= 2\#N(\Delta) - \#F_I(\Delta) + 2, \\ \#N(\Delta) &= \#V_I(\Delta) - \#E_I(\Delta) + \#F_I(\Delta) + 1.\end{aligned}$$

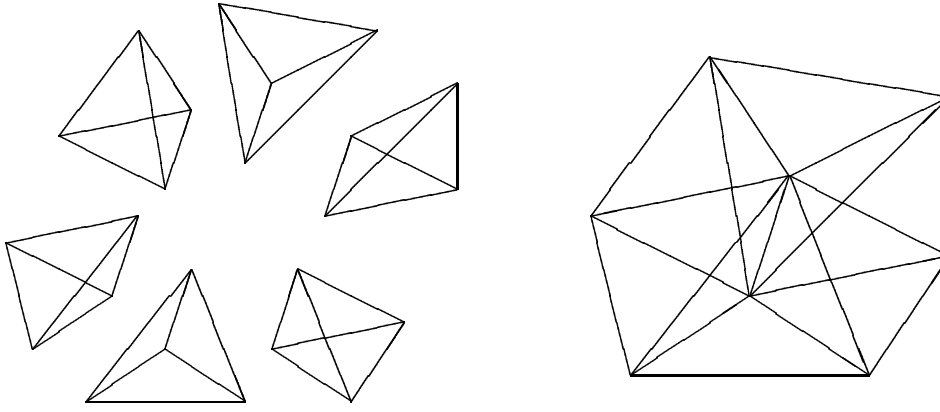


Abb. 55: Exemplarische Tetraederzerlegung bestehend aus sechs Tetraedern.

Zwei Tetraeder der Tetraederzerlegung **BERÜHREN EINANDER**, falls sie einen gemeinsamen Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante besitzen, und sind **BENACHBART**, falls sie eine gemeinsame Fläche haben. Zwei Dreiecksflächen  $F_1, F_2 \in F(\Delta)$  heißen **BENACHBART**, wenn es einen Tetraeder  $T \in \Delta$  gibt, der  $F_1$  und  $F_2$  als Seitenfläche besitzt. Eine Dreiecksfläche  $F = \Delta(v_1, v_2, v_3) \in F_I(\Delta)$  heißt **DEGENERIERT** in der Kante  $[v_1, v_2]$ , falls die beiden benachbarten Flächen in  $[v_1, v_2]$  in einer Ebene liegen.

## 8.2 Trivariate Splineräume

### Definition 8.2:

Für  $r, q \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq r \leq q$  und eine Tetraederzerlegung  $\Delta$  bezeichnet

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

den Splinerraum der  $r$  mal stetig differenzierbaren Funktionen vom Grad  $q$ . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j z^k : i, j, k \geq 0, i + j + k \leq q\}$$

der  $\binom{q+3}{3}$  dimensionale Raum der trivariaten Polynome vom totalen Grad  $\leq q$  und  $C^r(\Omega)$  die Menge der  $r$  mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Seien  $\rho_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, d := \#V(\Delta)$ , mit  $r \leq \rho_i < q$  gegeben. Dann definiert für  $\theta = (\rho_1, \dots, \rho_d)$

$$\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) = \{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta) : s \in C^{\rho_i}(v_i), i = 1, \dots, d\}$$

den SUPERSPLINERAAUM von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$  vom Grad  $\theta$ , einen Teilraum von  $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ .

Funktionen aus  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$  sind also stückweise Polynome vom Grad  $q$ , die  $r$  mal stetig differenzierbar über die Dreiecksflächen der Tetraeder von  $\Delta$  verknüpft sind und  $C^\theta$ -Differenzierbarkeit in den Knoten von  $\Delta$  besitzen.

Sei  $d \in \mathbb{R}^3$  ein Einheitsvektor und  $p$  eine genügend oft differenzierbare Funktion. Dann bezeichnen wir mit  $p_d(z)$  die partielle Ableitung von  $p$  im Punkt  $z$  in Richtung  $d$ . Ist  $\{d_1, d_2, d_3\} \subset \mathbb{R}^3$  eine linear unabhängige Menge von Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w p(z) = (p_{d_1^w}(z), p_{d_1^{w-1}d_2}(z), p_{d_1^{w-1}d_3}(z), \dots, p_{d_1d_3^{w-1}}(z), p_{d_2d_3^{w-1}}(z), p_{d_3^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad  $w$ .

### 8.3 Bézier-Bernstein-Methoden

In Analogie zur bivariaten Splinetheorie existiert im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  die trivariate Bézier-Bernstein-Darstellung von Polynomen (vgl. Kapitel 2). Sei  $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$  ein Tetraeder im  $\mathbb{R}^3$ . Dann gibt es für alle  $z \in \mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmte BARYZENTRISCHE KOORDINATEN  $\phi_1, \dots, \phi_4$  mit  $\sum_{i=1}^4 \phi_i = 1$  und der Interpolationseigenschaft  $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ , so dass sich  $z$  schreiben lässt als

$$z = \sum_{i=1}^4 \phi_i(z) \cdot v_i.$$

Für einen Tetraeder  $T \in \Delta$  und  $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}_0^4$  mit  $i + j + k + l = q$  definiert  $B_{i,j,k,l}^q \in \mathcal{P}_q$ , gegeben durch

$$B_{i,j,k,l}^q(z) = \frac{q!}{i! \cdot j! \cdot k! \cdot l!} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l)(z), \quad z \in T,$$

ein BERNSTEIN-POLYNOM vom Grad  $q$  bzgl.  $T$ . Die Menge aller Bernstein-Polynome vom Grad  $q$  bildet eine Basis von  $\mathcal{P}_q$ , weshalb sich jedes Polynom  $p \in \mathcal{P}_q$  in eindeutiger Weise in seiner BÉZIER-BERNSTEIN-DARSTELLUNG

$$p(z) = \sum_{i+j+k+l=q} a_{i,j,k,l}^{[T]} \cdot B_{i,j,k,l}^q(z), \quad z \in T,$$

schreiben lässt. Die reellen Koeffizienten

$$a_{i,j,k,l}^{[T]}, \quad i + j + k + l = q,$$

sind dabei die trivariaten BÉZIER-BERNSTEIN-KOEFFIZIENTEN über den gleichverteilten BÉZIER-BERNSTEIN-PUNKTEN

$$M_T = \left\{ P_{i,j,k,l}^{[T]} = \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3 + lv_4}{q}, \quad i + j + k + l = q \right\}.$$

Sei  $\mathcal{M}(\Delta) := \cup_{T \in \Delta} \mathcal{M}_T$  die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte der Zerlegung  $\Delta$  und für alle  $i + j + k + l = q$  und alle Tetraeder  $T \in \Delta$  das lineare Funktional

$$\lambda_{P_{i,j,k,l}^{[T]}} : \mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d.d.} \quad s \longrightarrow \lambda_{P_{i,j,k,l}^{[T]}}(s) = a_{i,j,k,l}^{[T]}$$

gegeben. Dann heißt  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\Delta)$  eine BESTIMMENDE MENGE für  $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ , falls gilt

$$\lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{M} \quad \implies \quad \lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{M}(\Delta).$$

$\mathcal{M}$  heißt MINIMAL, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Durch einer Verallgemeinerung der Aussage von Farin [67] lässt sich nach de Boor [22] die  $C^r$ -Stetigkeit trivariater Polynome über die gemeinsame Fläche benachbarter Tetraeder wie im Bivariaten durch Bedingungen an die Bézier-Bernstein-Koeffizienten charakterisieren. Seien  $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3, v_4)$  und  $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_3, v_5)$  zwei Tetraeder mit gemeinsamer Dreiecksfläche  $\Delta(v_1, v_2, v_3)$  und  $s \in \mathcal{S}_q^0(\{T_1, T_2\})$ , definiert durch  $s|_{T_m} \equiv p_m \in \mathcal{P}_q$ ,  $m = 1, 2$ , gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[m]}$ ,  $i + j + k + l = q$ ,  $m = 1, 2$ .

**Lemma 8.3:**

*Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i)  $s \in C^r(\{T_1, T_2\})$
- (ii) Für  $\rho = 0, \dots, r$  und  $i + j + k = q - \rho$  gilt

$$a_{i,j,k,\rho}^{[2]} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=\rho} a_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma,\delta}^{[1]} \frac{\rho!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!} (\phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma \phi_4^\delta)(v_5).$$

Für  $C^1$ -Splines vom Grad  $q$  auf zwei benachbarten Tetraedern ergeben sich aus der Formel in Lemma 8.3 (ii) über der gemeinsamen Fläche genau  $\binom{q+1}{2}$  Bedingungen der Form

$$a_{i,j,k,1}^{[2]} = a_{i+1,j,k,0}^{[1]} \phi_1(v_5) + a_{i,j+1,k,0}^{[1]} \phi_2(v_5) + a_{i,j,k+1,0}^{[1]} \phi_3(v_5) + a_{i,j,k,1}^{[1]} \phi_4(v_5),$$

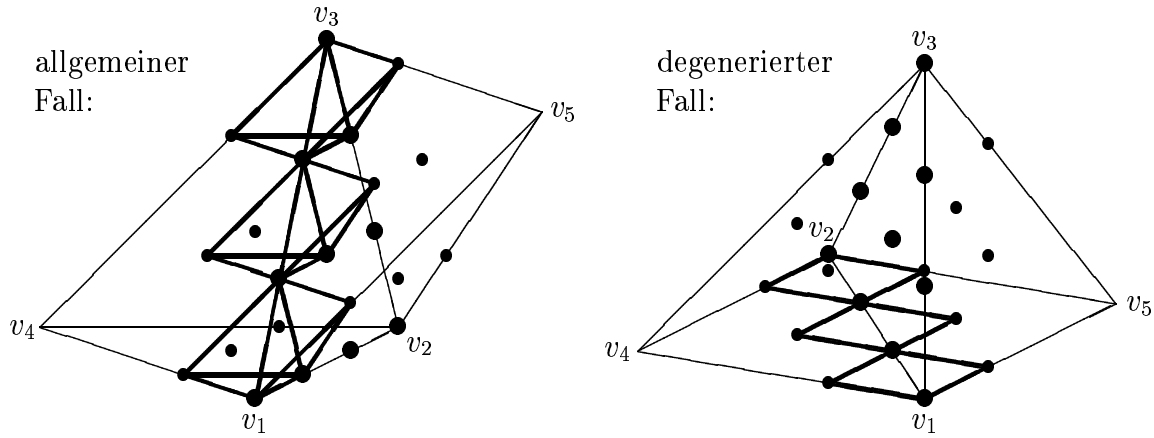
wobei  $i + j + k = q - 1$ . Im Allgemeinen sind in jeder dieser Gleichungen fünf Bézier-Bernstein-Koeffizienten involviert. Liegen vier der fünf Eckpunkte der beiden Tetraeder in einer Ebene, so sind nur vier Bézier-Bernstein-Koeffizienten relevant (vgl. Abbildung 56, rechts). Befinden sich sogar drei der Eckpunkte auf einer Geraden, so spielen lediglich drei Koeffizienten eine Rolle. Grund dafür ist, dass sich bei diesen Konstellationen ein bzw. zwei baryzentrische Koordinaten obiger Formeln zu Null berechnen. Daher werden solche Fälle auch als DEGENERIERT bezeichnet.

Nach de Boor [22] gilt:

**Lemma 8.4:**

*Die  $r$ -te Richtungsableitung des Bézier-Bernstein-Polynoms  $B_{i,j,k,l}^q$  entlang eines Einheitsvektors  $d \in \mathbb{R}^3$  ist für alle  $z \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch*

$$(B_{i,j,k,l}^q)_{d^r}(z) = \frac{q!}{(q-r)!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=r} B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^r(d) B_{i-\alpha,j-\beta,k-\gamma,l-\delta}^{q-r}(z), \quad i + j + k + l = q.$$

Abb. 56: Relevante Koeffizienten und drei der sechs  $C^1$ -Bedingungen für  $q = 3$ .

Damit lässt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen trivariater Polynome und den Koeffizienten ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung herleiten (vgl. Farin [67], Nürnberger und Zeilfelder [112], Lemma 2.12). Sei  $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$  und  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , ein Einheitsvektor entlang  $[v_1, v_{i+1}]$ . Ferner sei  $p \in \mathcal{P}_q$  definiert durch

$$p(z) = \sum_{i+j+k+l=q} a_{i,j,k,l} \cdot B_{i,j,k,l}^q(z), \quad z \in T.$$

**Lemma 8.5:**

Für  $\alpha + \beta + \gamma \leq q$  gilt

$$p_{d_1^\alpha d_2^\beta d_3^\gamma}(v_1) = \frac{q!}{(q-\alpha-\beta-\gamma)!} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\gamma} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \binom{\gamma}{l} \cdot (\phi_1)_{d_1}^{\alpha-j} (\phi_1)_{d_2}^{\beta-k} (\phi_1)_{d_3}^{\gamma-l} (\phi_2)_{d_1}^j (\phi_3)_{d_2}^k (\phi_4)_{d_3}^l \cdot a_{q-j-k-l,j,k,l},$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} a_{q-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma} &= \frac{(q-\alpha-\beta-\gamma)!}{q! (\phi_2)_{d_1}^\alpha (\phi_3)_{d_2}^\beta (\phi_4)_{d_3}^\gamma} p_{d_1^\alpha d_2^\beta d_3^\gamma}(v_1) - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{j} \left( \frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \cdot a_{q-j-\beta-\gamma,j,\beta,\gamma} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \left( \frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left( \frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \cdot a_{q-j-k-\gamma,j,k,\gamma} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\gamma-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \binom{\gamma}{l} \left( \frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left( \frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \left( \frac{(\phi_1)_{d_3}}{(\phi_4)_{d_3}} \right)^{\gamma-l} \cdot a_{q-j-k-l,j,k,l}. \end{aligned}$$

Folglich können die partiellen Ableitungen  $p_{d_1^j d_2^k d_3^l}(v_1)$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ ,  $l = 0, \dots, \gamma$ , in eindeutiger Weise aus den Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $a_{q-j-k-l,j,k,l}$ , und umgekehrt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $a_{q-j-k-l,j,k,l}$ ,  $j = 0, \dots, \alpha$ ,  $k = 0, \dots, \beta$ ,  $l = 0, \dots, \gamma$ , in eindeutiger Weise aus den partiellen Ableitungen  $p_{d_1^j d_2^k d_3^l}(v_1)$  berechnet werden.





## Kapitel 9:

# Interpolation mit $C^1$ -Supersplines auf Klassen von Tetraederzerlegungen

In diesem Kapitel untersuchen wir Interpolation mit trivariaten  $C^1$ -Supersplines vom Grad  $\geq 6$ . Bereits in einer frühen Arbeit der Finite-Elemente Theorie untersuchte Ženišek [145] Supersplineräume  $\mathcal{S}_q^{r,4r}(\Delta)$  auf beliebigen Tetraederzerlegungen mit relativ hohem Polynomgrad  $q \geq 8r + 1$ . Farin und Worsey [144] entwickelten in einer Verallgemeinerung des bivariaten Clough-Tocher-Elements eine Methode zur Hermite-Interpolation mit kubischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Tetraederzerlegungen, bei der jeder Tetraeder in zwölf Subtetraeder unterteilt wird. Außerdem untersuchte Alfeld [2] Hermite-Interpolation mit  $\mathcal{S}_5^{1,2}(\Delta)$ ,  $\Delta$  beliebig, wobei jeder Tetraeder in vier Subtetraeder unterteilt wird (trivariater Clough-Tocher-Split). Für eine vorgegebene Klasse von speziellen Tetraederzerlegungen entwickelten Lai und LeMéhauté [98] ein Verfahren zur lokalen Hermite-Interpolation mit  $C^1$ -Supersplines vom Grad fünf. Darüber hinaus wurden kürzlich natürliche Zerlegungen vorgegebener gleichmäßiger Würfelpartitionen untersucht, die als Verallgemeinerung der bivariaten Rechteckstriangulierungen  $\Delta^2$  interpretierbar sind (vgl. Schumaker und Sorokina [135], Hangelbroek, Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [75] und Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [119]).

Wir beschreiben in diesem Kapitel den ersten Algorithmus zur Konstruktion von Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für Supersplineräume  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , auf allgemeinen Klassen von Tetraederzerlegungen, wobei keine Tetraeder unterteilt werden. Solche Zerlegungen  $\Delta$  werden, wie in Abschnitt 9.1 beschrieben, induktiv konstruiert, indem ausgehend von einem Starttetraeder weitere Tetraeder in Form von Ketten (vgl. Abbildung 57) oder Halbzellen (vgl. Abbildung 58) angehängt werden. Letztere wurden von Alfeld, Schumaker und Whiteley [8] (siehe auch Alfeld, Schumaker und Sirvent [7]) "Oranges" genannt. In Abschnitt 9.2 durchlaufen wir für  $q \geq 6$  sukzessive die angehängten Elemente der Zerlegung und wählen induktiv geeignete Bézier-Bernstein-Punkte, die eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$  bilden. Damit bestimmen wir unter Verwendung von Bézier-Bernstein-Techniken die Dimension dieser Splineräume. In Abschnitt 9.3 und 9.4 wählen wir darauf aufbauend geeignete Interpolationsbedingungen bzw. Interpolationspunkte auf dem Starttetraeder und auf den Tetraedern der angehängten Ketten und Halbzellen und konstruieren so schrittweise Hermite- bzw. Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume auf der ganzen Zerlegung  $\Delta$ . Ähnlich der bivariaten Verfahren von Nürnberger und Zeilfelder [112,113], welche hier im Kontext trivariater Splines verallgemeinert werden, können Hermite-Interpolationsmengen als Grenzwert der Lagrange-Interpolationsmengen interpretiert werden.

## 9.1 Konstruktion von Tetraederzerlegungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Algorithmus zur Konstruktion von allgemeinen Klassen von Tetraederzerlegungen  $\Delta$  an. Ausgehend von einem Starttetraeder definieren wir eine Kette von Zerlegungen  $\Delta_n$ ,  $n = 0, \dots, k$ , mit  $\Delta_0 \subset \dots \subset \Delta_k = \Delta$ , wobei Schritt für Schritt geeignete Tetraeder zur bisherigen Zerlegung hinzugefügt werden und so  $\Delta$  induktiv konstruiert wird.

Im ersten Schritt wählen wir vier Punkte im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht alle in einer Ebene liegen, verbinden sie zu einem Tetraeder  $T_0 = \Omega_0$  und setzen  $\Delta_0 = \{T_0\}$ . Sei jetzt die Subtetraederzerlegung  $\Delta_{n-1}$ ,  $n \in \{1, \dots, k\}$ , bereits konstruiert, dann wählen wir neue Punkte in  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$  und verbinden sie mit den bisherigen Knoten. Es gibt zwei Alternativen:

**1. Möglichkeit:** Anhängen einer Kette (vgl. Abbildung 57);

Wähle vier Knoten  $v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,4} \in V_B(\Delta_{n-1})$  auf dem Rand von  $\Omega_{n-1}$ , die zwei benachbarte Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,3})$ ,  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,4}) \in F_B(\Delta_{n-1})$  mit gemeinsamer Kante  $[v_{n-1,1}, v_{n-1,2}]$  bilden. Nun wähle geeignete neue Punkte  $w_{n,1}, \dots, w_{n,k_n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$ , setze  $w_{n,0} := v_{n-1,3}$  sowie  $w_{n,k_n+1} := v_{n-1,4}$  und verbinde die Knoten zu den Tetraedern

$$T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m}, w_{n,m+1}), \quad m = 0, \dots, k_n - 1,$$

und

$$T_{n,k_n} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1}, w_{n,k_n}).$$

Setze  $\Omega_n := \Omega_{n-1} \cup (\cup_{m=0}^{k_n} T_{n,m})$  sowie  $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,m}, m = 0, \dots, k_n\}$ , die zu  $\Omega_n$  gehörende Subtetraederzerlegung von  $\Delta$ . Geeignete neue Punkte sind dabei solche, für die gilt:

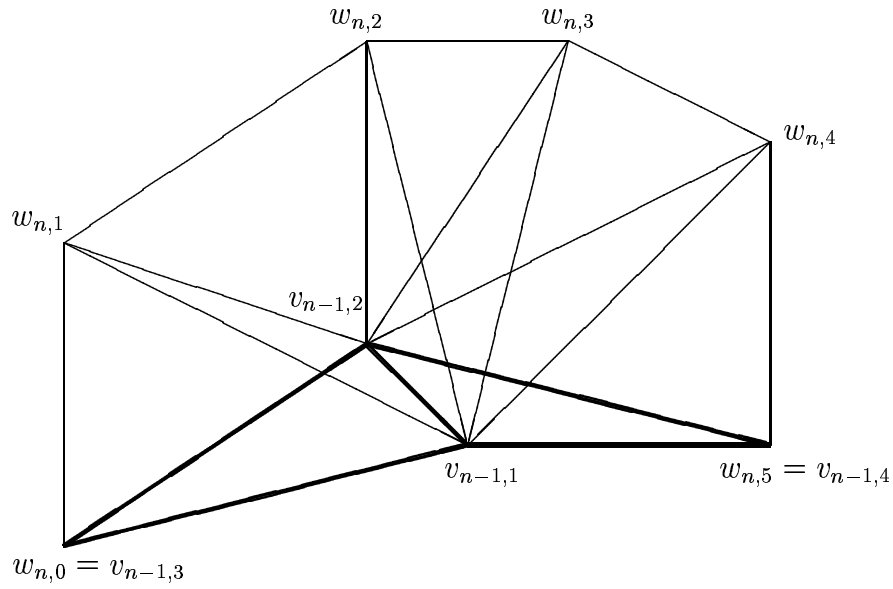
- (i) die Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m})$ ,  $m = 0, \dots, k_n+1$ , liegen in paarweise verschiedenen Ebenen;
- (ii) die Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, w_{n,m-1}, w_{n,m})$  und  $\Delta(v_{n-1,1}, w_{n,m}, w_{n,m+1})$  für  $m = 1, \dots, k_n+1$  sowie  $\Delta(v_{n-1,2}, w_{n,m-1}, w_{n,m})$  und  $\Delta(v_{n-1,2}, w_{n,m}, w_{n,m+1})$  für  $m = 1, \dots, k_n+1$  liegen in verschiedenen Ebenen;
- (iii) alle Flächen in  $F(\Delta_n)$  mit gemeinsamer Kante  $[w_{n,0}, v_{n-1,1}]$  bzw.  $[w_{n,0}, v_{n-1,2}]$ ,  $[w_{n,k_n+1}, v_{n-1,1}]$  oder  $[w_{n,k_n+1}, v_{n-1,2}]$  liegen in paarweise verschiedenen Ebenen.

**2. Möglichkeit:** Anhängen einer Halbzelle (vgl. Abbildung 58);

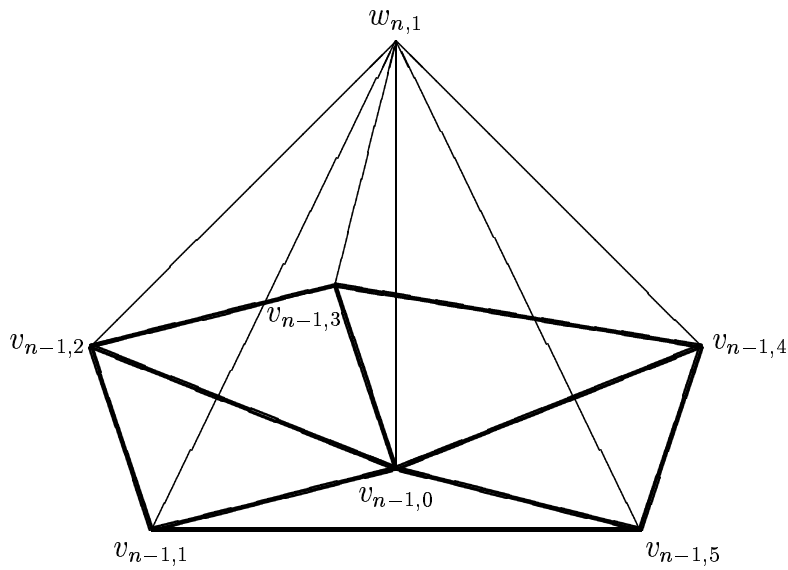
Wähle Knoten  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$  auf dem Rand von  $\Omega_{n-1}$ , die eine bivariate Zelle  $\Delta_{v_{n-1,0}}$  mit Randknoten  $v_{n-1,m}$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , bilden. Jetzt wähle einen geeigneten neuen Punkt  $w_{n,1} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$ , verbinde die Knoten zu den Tetraedern

$$T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}, w_{n,1}), \quad m = 1, \dots, k_n,$$

( $v_{n-1,k_n+1} = v_{n-1,1}$ ), und setze  $\Omega_n := \Omega_{n-1} \cup (\cup_{m=1}^{k_n} T_{n,m})$  sowie  $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,m}, m = 1, \dots, k_n\}$ , die zu  $\Omega_n$  gehörende Subtetraederzerlegung von  $\Delta$ . Ein neuer Punkt ist dabei geeignet, wenn gilt:

Abb. 57: Angehängte Kette mit  $k_n = 4$  (Möglichkeit 1).

- (i)  $k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$ ;
- (ii) die Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, w_{n,1}, v_{n-1,m})$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , liegen in paarweise verschiedenen Ebenen;
- (iii) für  $m = 1, \dots, k_n$  besitzen alle Dreiecksflächen von  $F(\Delta_n)$  mit gemeinsamer Kante  $[v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}]$ ,  $(v_{n-1,k_n+1} = v_{n-1,1})$ , paarweise verschiedene Steigungen.

Abb. 58: Angehängte Halbzelle mit  $k_n = 5$  (Möglichkeit 2).

**Bemerkungen 9.1:**

- Werden Tetraeder nach Möglichkeit 1 angehängt, so entsteht eine neue innere Kante, werden Tetraeder nach Möglichkeit 2 angehängt, so entsteht ein neuer innerer Knoten. Daher sind beide Elemente notwendig aber auch hinreichend für die Konstruktion allgemeiner Klassen natürlicher Tetraederzerlegungen.
- Seien  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$  Knoten, die eine bivariate Zelle  $\Delta_{v_{n-1,0}}$  geraden Grades  $\leq 8$  bilden. Dann kann hier keine Halbzelle (Möglichkeit 2) angehängt werden. Wir fügen zuerst für geeignete Knoten  $v_{n-1,0}, v_{n-1,m-1}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}$  mit  $1 \leq m \leq k_n$  eine Kette hinzu, wobei genau zwei Knoten  $w_{n,1}, w_{n,2}$  neu gewählt werden. Dadurch entsteht auf dem Rand von  $\Omega_n$  durch die Knoten  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,m-1}, w_{n,1}, w_{n,2}, v_{n-1,m+1}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_n)$  eine Zelle ungeraden Grades  $k_{n+1} = k_n + 1$ . Nun kann im nächsten Schritt eine Halbzelle angehängt werden.

**9.2 Die Dimension von  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$** 

In diesem Abschnitt bestimmen wir für  $q \geq 6$  die Dimension der Splineräume  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$  auf Tetraederzerlegungen  $\Delta$ , die in Paragraph 9.1 konstruiert wurden. Dazu definieren wir Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten  $\mathcal{A}^{(q)}, \mathcal{B}^{(q)}, \mathcal{C}^{(q)}, \mathcal{D}^{(q)}$  und  $\mathcal{E}_d^{(q)}$ ,  $d = 3, 5, 7, 9$ , die wir induktiv den Tetraedern von  $\Delta$  zuordnen. Auf jedem Tetraeder  $T_m$  werden hierdurch die entsprechenden Bézier-Bernstein-Punkte  $\{P_{i,j,k,l}^{[T_m]} \mid P_{i,j,k,l} \text{ ist in der } T_m \text{ zugeordneten Menge}\}$  gewählt. Wir zeigen, dass diese Bézier-Bernstein-Punkte minimal bestimmende Mengen der Splineräume  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , bilden. Seien

$$\mathcal{Q}^{(q)} := \{P_{i,j,k,l} \mid i + j + k + l = q; i, j, k, l \geq 0\}, \quad q \geq 6,$$

$$\mathcal{A}^{(q)} := \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid i, j, k \leq q - 4; l \geq 2\}, \quad q \geq 6,$$

$$\mathcal{B}^{(q)} := \begin{cases} \mathcal{A}^{(6)} \setminus \{P_{2,2,0,2}, P_{0,1,2,3}\}, & q = 6, \\ \mathcal{A}^{(q)} \setminus \{P_{2,q-4,0,2}, \dots, P_{q-4,2,0,2}\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{(q)} := \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid 2 \leq k, l \leq q - 4\}, \quad q \geq 6,$$

$$\mathcal{D}^{(q)} := \begin{cases} \{P_{0,2,2,2}, P_{1,2,1,2}\}, & q = 6, \\ \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid 2 \leq k, l \leq q - 4\} \setminus \{P_{i,0,k,2} \mid i + k = q - 2\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_d^{(q)} := \begin{cases} \mathcal{D}^{(6)} \cup \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid l \geq 4\} \\ \cup \begin{cases} \{P_{i,j,k,3} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid i, j, k \leq 2; (i, j, k) \neq (0, 1, 2)\}, & d = 3, \\ \{P_{i,j,k,3} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid 1 \leq i \leq 2; k \leq 1\}, & d = 5, \\ \{P_{2,j,k,3} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid j + k = q - 5\}, & d = 7, \\ \emptyset, & d = 9, \end{cases} & q = 6, \\ \mathcal{D}^{(q)} \cup \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid j + k \leq 1; i, l \leq q - 4\} \\ \cup \{P_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^{(q)} \mid l \geq q - 3\}, & q \geq 7. \end{cases}$$

Sei  $\Delta$  eine in Abschnitt 9.1 konstruierte Zerlegung. Dann ordnen wir den Tetraedern von  $\Delta_0$  und  $\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$ ,  $n \in \{1, \dots, k\}$ , folgende Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten zu (vgl. Abbildung 59). Für jeden Tetraeder  $T = \Delta(u, v, w, x) \in \Delta$  ist dabei  $i$  der zu  $u$ ,  $v$  der zu  $j$ ,  $k$  der zu  $w$  und  $l$  der zum Eckpunkt  $x$  gehörende Index des Bézier-Bernstein-Punkts  $P_{i,j,k,l}^{[T]}$ . Wir ordnen

- $T_0$  die Menge  $\mathcal{Q}^{(q)}$  zu.

Wird im Induktionsschritt eine Kette angehängt, so ordnen wir

- $T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m}, w_{n,m+1})$ ,  $m = 0, \dots, k_n - 2$ , die Menge  $\mathcal{A}^{(q)}$ ,
- $T_{n,k_n-1} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n-1}, w_{n,k_n})$  die Menge  $\mathcal{B}^{(q)}$  und
- $T_{n,k_n} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1}, w_{n,k_n})$  die Menge  $\mathcal{C}^{(q)}$  zu.

Wird im Induktionsschritt eine Halbzelle angehängt, so ordnen wir

- $T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}, w_{n,1})$ ,  $m = 2, \dots, k_n$ , die Menge  $\mathcal{D}^{(q)}$  und
- $T_{n,1} = \Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,1})$  die Menge  $\mathcal{E}_d^{(q)}$  zu.

Dabei ist  $d = k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$  der Grad der bivariaten Zelle  $\Delta_{v_{n-1,0}}$  auf dem Rand von  $\Omega_{n-1}$ .

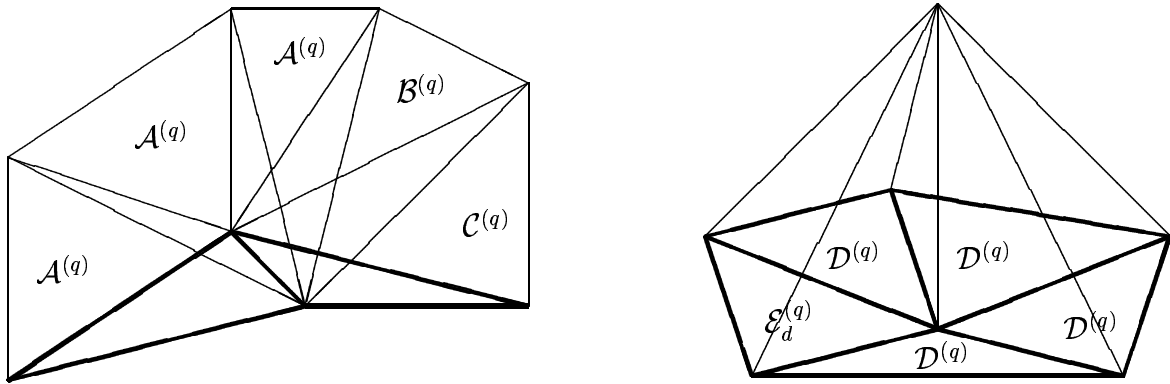


Abb. 59: Zugeordnete Mengen für angehängte Tetraeder.

**Theorem 9.2:**

Sei  $q \geq 6$ ,  $\Delta$  wie in Paragraph 9.1 konstruiert und  $\mathcal{M}^{(q)}$  die Menge aller in den Tetraedern von  $\Delta$  gewählter Bézier-Bernstein-Punkte. Dann ist  $\mathcal{M}^{(q)}$  eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$  und es gilt:

$$\dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)) = \#\mathcal{M}^{(q)}.$$

**Beweis:**

Sei  $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , mit  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta$ , gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T]} \in \mathbb{R}$ ,  $i+j+k+l=q$ . Wir zeigen, dass zu jeder Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{M}^{(q)}$ ,  $q \geq 6$ , genau ein Spline  $s$  existiert, der diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt. Dann ist  $\mathcal{M}^{(q)}$  eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$  (vgl. [112,113]).

Die Menge  $\mathcal{Q}^{(q)}$  der in  $T_0$  gewählten Punkte ist die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte des Dreiecks  $T_0$ . Daher gibt es zu jeder Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{Q}^{(q)}$  auf  $T_0$  genau ein Polynom mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Sei jetzt für ein  $n \in \{1, \dots, k\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{n-1}}$  eindeutig bestimmt ist, dann betrachten wir die Subtetraederzerlegung  $\Delta_n$ . Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

**Fall 1:** Anhängen einer Kette;

Sei o.B.d.A.  $k_n \geq 2$  (ansonsten entfallen alle Tetraeder mit zugeordneter Menge  $\mathcal{A}^{(q)}$ ). Durch die  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,0})$  und der Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,1}$ ,  $v_{n-1,2}$  und  $w_{n,0}$  sind die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,0}]}$ ,  $l \leq 1$ , sowie  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,0}]}$  für  $i, j$  oder  $k \geq q-3$ ,  $l \geq 2$ , nach Lemma 8.3 eindeutig bestimmt. Gibt man nun reelle Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{A}^{(q)}$  auf  $T_{n-1,0}$  vor, so sind auch die verbleibenden Bézier-Bernstein-Koeffizienten auf diesem Tetraeder eindeutig festgelegt und es gibt genau ein Polynom  $p^{[T_{n,0}]}$  mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Mit analogem Argument folgt die Eindeutigkeit der Polynome  $p^{[T_{n,m}]}$ ,  $m = 1, \dots, k_n - 2$ .

Betrachten wir nun den Tetraeder  $T_{n,k_n-1}$  und geben dort reelle Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{B}^{(q)}$  vor. Die  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n-1})$  und die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,1}$ ,  $v_{n-1,2}$  und  $w_{n,k_n-1}$  liefern nach Lemma 8.3 die Eindeutigkeit der Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$ ,  $l \leq 1$ , sowie  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$  für  $i, j$  oder  $k \geq q-3$ ,  $l \geq 2$ . Da die drei Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m})$ ,  $m = k_n - 1, \dots, k_n + 1$ , nach Konstruktion in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, impliziert die  $C^1$ -Stetigkeit über  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$ , dass die Koeffizienten  $a_{2+i, q-4-i, 0, 2}^{[T_{n,k_n-1}]}$ ,  $i = 0, \dots, q-6$ , nach Lemma 8.3 eindeutig bestimmt sind. Für  $q = 6$  folgt mit der  $C^3$ -Supersplineeigenschaft im Knoten  $w_{n,k_n}$  nach Lemma 8.3 auch die Eindeutigkeit des Koeffizienten  $a_{0,1,2,3}^{[T_{n,k_n-1}]}$ . Dabei wird der Koeffizient  $a_{0,0,3,3}^{[T_{n,k_n}]}$  verwendet, der durch die Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n+1}$  bestimmt ist. Somit sind im Tetraeder  $T_{n,k_n-1}$  alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten eindeutig, d.h. es gibt genau ein Polynom  $p^{[T_{n,k_n-1}]}$  mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung.

Auf  $T_{n,k_n}$  sind durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den Dreiecksflächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m})$ ,  $m = k_n, k_n + 1$ , nach Lemma 8.3 die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$ ,  $k \leq 1$  oder  $l \leq 1$ , sowie durch die Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,1}$ ,  $v_{n-1,2}$ ,  $w_{n,k_n}$  und  $w_{n,k_n+1}$  die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$ , wobei  $i, j, k$  oder  $l \geq q-3$  und  $k, l \geq 2$ , eindeutig bestimmt. Werden nun Bézier-

Bernstein-Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{C}^{(q)}$  auf  $T_{n,k_n}$  vorgegeben, so gibt es auf  $T_{n,k_n}$  genau ein Polynom  $p^{[T_{n,k_n}]}$ , das diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt. Insgesamt ist damit  $s|_{\Omega_n}$  eindeutig bestimmt.

**Fall 2:** Anhängen einer Halbzelle;

Durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , sind nach Lemma 8.3 die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$ ,  $l \leq 1$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , eindeutig bestimmt. Die Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,0}$ ,  $v_{n-1,m}$  und  $v_{n-1,m+1}$  liefert zusätzlich die Eindeutigkeit von  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$ ,  $i, j$  oder  $k \geq q-3$ ,  $l \geq 2$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ .

Da für  $m = 1, \dots, k_n$  die drei Dreiecksflächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m-1}, v_{n-1,m})$ ,  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$  und  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$  nach Konstruktion in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, sind mit der  $C^1$ -Stetigkeit über diesen Flächen nach Lemma 8.3 die Koeffizienten  $a_{2+j,q-4-j,0,2}^{[T_{n,m}]}$ ,  $j = 0, \dots, q-6$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , eindeutig bestimmt. Werden reelle Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{E}_d^{(q)}$  auf  $T_{n,1}$  vorgegeben, so sind durch die  $C^1$ -Stetigkeit in  $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$

nach Lemma 8.3 die Koeffizienten  $a_{3+i,0,1,q-4-i}^{[T_{n,m}]}$ ,  $i = 0, \dots, q-7$ ,  $m = 2, \dots, k_n-1$ , eindeutig bestimmt. Bei Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{D}^{(q)}$  auf den Tetraedern  $T_{n,m}$ ,  $m = 2, \dots, k_n$ , lassen sich mit der  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , die Koeffizienten  $a_{i,j,1,l}^{[T_{n,m}]}$ ,  $2 \leq j, l \leq q-4$ , nach Lemma 8.3 eindeutig berechnen.

Die Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $a_{2+i,1,1,q-4-i}^{[T_{n,m}]}$ ,  $i = 0, \dots, q-6$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , ergeben sich dabei aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , durch ein lineares Gleichungssystem, da  $k_n$  ungerade ist (vgl. Lemma 2.5, siehe auch Alfeld, Piper und Schumaker [3], Lemma 3). Für  $q = 6$  liefert die  $C^3$ -Supersplineeigenschaft im Knoten  $w_{n,1}$  zusammen mit den entsprechend  $\mathcal{E}_d^{(6)}$  gegebenen Koeffizienten für  $d \in \{3, 5, 7, 9\}$  nach Lemma 8.3 die fehlenden Koeffizienten in  $\{a_{i,j,k,q-3}^{[T_{n,m}]}, i+j+k=3, m=1, \dots, k_n\}$ . Für  $q \geq 7$  ergeben sich die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$ ,  $l \geq q-3$ ,  $m = 2, \dots, k_n$ , nach Lemma 8.3 aus den Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,1}]}$ ,  $l \geq q-3$ , mit der Supersplineeigenschaft im Knoten  $w_{n,1}$ . Insgesamt sind damit alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten der Punkte in  $\mathcal{M}(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1})$  eindeutig bestimmt. Es gibt für  $q \geq 6$  und  $m = 1, \dots, k_n$  daher genau ein Polynom  $p^{[T_{n,m}]} \in \mathcal{P}_q$ , das diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt, d.h.  $s|_{\Omega_n}$  ist eindeutig bestimmt.

Da die Tetraederzerlegung induktiv durch Anhängen von Ketten und Halbzellen entsteht, ist  $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , auf ganz  $\Omega$  eindeutig bestimmt. Also ist  $\mathcal{M}^{(q)}$  eine minimal bestimmende Menge dieses Splineraums.

#

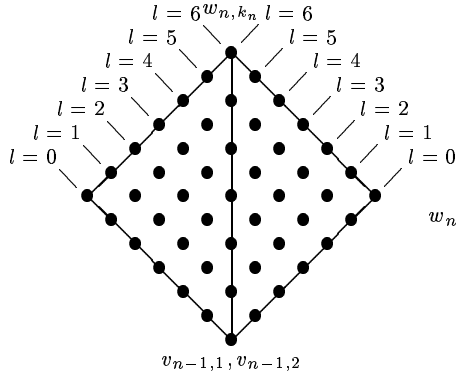
### Beispiele 9.3:

Abbildung 60 zeigt für  $q = 6$  die Bézier-Bernstein-Koeffizienten zweier als Kette angehängter Tetraeder von der Seite (links) bzw. von oben (rechts). Alle Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$  und  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$  mit  $l \leq 1$  sind durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen in  $F_B(\Delta_{n-1})$  nach Lemma 8.3 eindeutig bestimmt. Die Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n}$  liefert mit den gegebenen Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{B}^{(q)}$  in eindeutiger Weise alle Koeffizienten mit  $l = 4, \dots, 6$ . Für

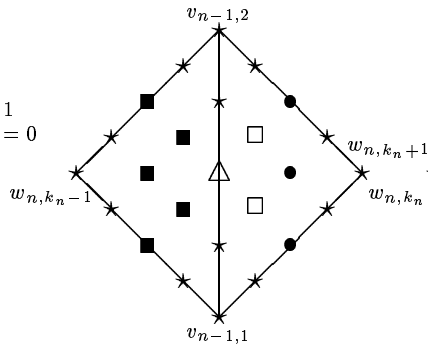
$l = 2, 3$  sind die Koeffizienten aus folgenden Gründen eindeutig:

- ★ : Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,m}$ ,  $m = 1, \dots, 4$ ,
- $\triangle$  :  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$ ,
- : Punktmenge  $\mathcal{B}^{(6)}$ ,
- $\square$  :  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$  mit den Koeffizienten ■,
- : Punktmenge  $\mathcal{C}^{(6)}$ ,
- : Supersplineeigenschaft im Knoten  $w_{n,k_n}$  mit den Koeffizienten ■ und ★.

seitlich:



von oben,  $l = 2$ :



von oben,  $l = 3$ :

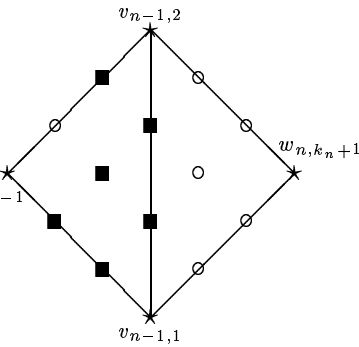
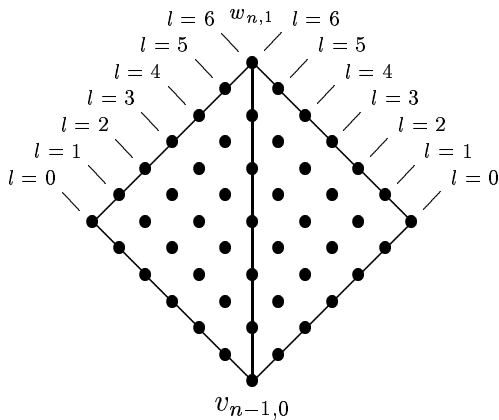


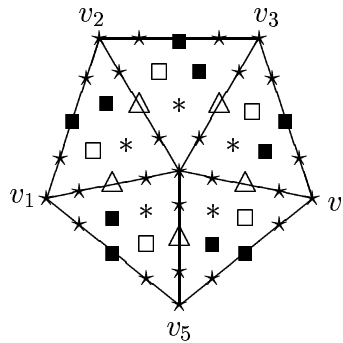
Abb. 60: Koeffizienten auf  $T_{n,k_n-1}$  und  $T_{n,k_n}$  beim Anhängen einer Kette,  $q = 6$ .

Abbildung 61 zeigt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten einer angehängten Halbzelle für  $q = 6$  und  $d = 5$ . Die Koeffizienten  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$  und  $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$  mit  $l \leq 1$  sind nach Lemma 8.3 durch die  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen in  $F_B(\Delta_{n-1})$  eindeutig. Die Koeffizienten mit  $l = 4, \dots, 6$  ergeben sich aus den Koeffizienten entsprechend  $\mathcal{E}_5^{(6)}$  und der  $C^3$ -Supersplineeigenschaft in  $w_{n,1}$ . Für  $l = 2, 3$  sind die Koeffizienten aus folgenden Gründen eindeutig:

seitlich:



von oben,  $l = 2$ :



von oben,  $l = 3$ :

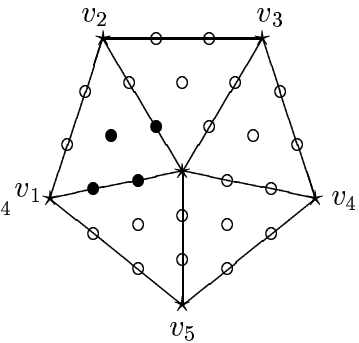


Abb. 61: Koeffizienten einer angehängten Halbzelle für  $q = 6$  und  $d = 5$ .



- ★ : Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n}$ ,
- △ :  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$ ,
- \* : durch LGS mit  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,
- : Die Menge  $\mathcal{D}^{(6)}$ ,
- :  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$  mit den Koeffizienten ■,
- : Die Menge  $\mathcal{E}_5^{(6)}$ ,
- : Supersplineeigenschaft im Knoten  $w_{n,1}$  mit den Koeffizienten ●.

**Korollar 9.4:**

Für  $q \geq 6$  gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_0)) = \binom{q+3}{3} = \frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6},$$

und

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)) &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + (k_n - 1)\#\mathcal{A}^{(q)} + \#\mathcal{B}^{(q)} + \#\mathcal{C}^{(q)} \\ &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + \begin{cases} 23k_n + 1, & q = 6 \\ k_n \left[ \binom{q+1}{3} - 12 \right] + \binom{q-1}{3} - q - 3, & q \geq 7, \end{cases} \end{aligned}$$

falls eine Kette an die Subtetraederzerlegung  $\Delta_{n-1}$  angehängt wird, sowie

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)) &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + (k_n - 1)\#\mathcal{D}^{(q)} + \#\mathcal{E}_d^{(q)} \\ &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + \begin{cases} k_n + 19, & q = 6 \\ k_n \left[ \binom{q-1}{3} - q - 3 \right] + 3q + 1, & q \geq 7, \end{cases} \end{aligned}$$

falls eine Halbzelle an die Subtetraederzerlegung  $\Delta_{n-1}$  angehängt wird.

## 9.3 Hermite-Interpolation

In diesem Abschnitt konstruieren wir Hermite-Interpolationsmengen für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , auf der in Paragraph 9.1 definierten Klasse von Tetraederzerlegungen. Dazu wählen wir Interpolationsbedingungen auf dem Starttetraeder und induktiv in den Knoten der angehängten Tetraeder der Ketten und Halbzellen und bestimmen so den interpolierenden Spline Schritt für Schritt.

Zunächst formulieren wir eine Aussage über partielle Ableitungen eines Polynoms. Sei  $p \in \mathcal{P}_q$ ,  $q \geq 6$ , gegeben,  $z \in \mathbb{R}^3$  und  $X = \{d_0, d_1, \dots, d_{k_n}\} \subset \mathbb{R}^3$  für  $k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$  eine Menge von Einheitsvektoren, derart dass je drei dieser Vektoren linear unabhängig sind. Die Menge  $\mathcal{H}^i$ ,  $i = 3, 5, 7, 9$ , enthalte die Bedingungen  $p_{d^3}(z) = 0$  für alle  $d \in X$  und zusätzlich

- $p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(z) = 0$  für  $u, v, w \leq 2$ ;  $u + v + w = 3$ ;  $(u, v, w) \neq (0, 1, 2)$ , falls  $i = 3$ ,
- $p_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(z) = 0$ ,  $\rho = 1, 2$ , und  $p_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(z) = 0$ ,  $\rho = 0, 1$ , falls  $i = 5$ , und
- $p_{d_1^2 d_2}(z) = 0$  und  $p_{d_1 d_2^2}(z) = 0$ , falls  $i = 7$ .

**Lemma 9.5:**

Sei  $q \geq 6$ ,  $z \in \mathbb{R}^3$  und  $p \in \mathcal{P}_q$ . Dann folgt aus den homogenen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}^i$ ,  $i \in \{3, 5, 7, 9\}$ , dass  $D^3 p(z) \equiv 0$ .

**Beweis:**

Sei  $\{e_1, \dots, e_3\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  und  $d_j$  für  $j = 1, \dots, 3$  ein Einheitsvektor entlang  $e_j$ . Dann kann für jeden Einheitsvektor  $d$  des  $\mathbb{R}^3$  die partielle Ableitung  $p_d(z)$  dargestellt werden durch

$$p_d(z) = \frac{\sin(\tilde{\alpha}_1)}{\sin(\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1)} p_{d_1}(z) + \frac{\sin(\tilde{\alpha}_2)}{\sin(\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2)} p_{d_2}(z) + \frac{\sin(\tilde{\alpha}_3)}{\sin(\alpha_3 + \tilde{\alpha}_3)} p_{d_3}(z),$$

wobei  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , der von  $d_j$  und  $d$  eingeschlossene Winkel und  $\tilde{\alpha}_j$ ,  $j = 1, \dots, 3$  der in der  $d, d_j$ -Ebene von  $d$  und der von den anderen beiden Vektoren erzeugten Ebene eingeschlossene Winkel ist. Daraus ergibt sich

$$p_{d^3}(z) = \sum_{i+j+k=3} \left( \frac{\sin(\tilde{\alpha}_1)}{\sin(\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1)} \right)^i \left( \frac{\sin(\tilde{\alpha}_2)}{\sin(\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2)} \right)^j \left( \frac{\sin(\tilde{\alpha}_3)}{\sin(\alpha_3 + \tilde{\alpha}_3)} \right)^k \cdot p_{d_1^i d_2^j d_3^k}(z).$$

Durch die gegebenen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{H}^i$  entlang der Vektoren in  $X$  und für die gemischten partiellen Ableitungen existieren insgesamt genau zehn homogene Interpolationsbedingungen an  $D^3 p(z)$ . Da je drei Vektoren in  $X$  linear unabhängig sind, lassen sich die fehlenden partiellen Ableitungen von  $D^3 p(z)$  für  $i \in \{3, 5, 7, 9\}$  durch ein lineares Gleichungssystem eindeutig Null berechnen.

#

Wir definieren nun für einen Tetraeder  $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$  Mengen von Interpolationsbedingungen, die wir in analoger Weise den Tetraedern von  $\Delta$  zuordnen wie in Abschnitt 9.2 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Seien  $f \in C(\Omega)$  eine genügend oft differenzierbare Funktion und  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, 3$ ,  $d_4 = d_1$ , Einheitsvektoren entlang  $e_j = [v_4, v_j]$ . Dann setzen wir:

$$\mathcal{Q}^{(q)} : D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, q, \quad q \geq 6,$$

$$\mathcal{A}^{(q)} : D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, q-2, \quad q \geq 6,$$

außer: 
$$\begin{cases} p_{d_j^\rho}(v_4) = f_{d_j^\rho}(v_4), & \rho = q-2, q-3; \quad j = 1, \dots, 3, \\ p_{d_j^{q-3} d_{j+1}}(v_4) = f_{d_j^{q-3} d_{j+1}}(v_4), & j = 1, \dots, 3, \\ p_{d_j^{q-3} d_{j-1}}(v_4) = f_{d_j^{q-3} d_{j-1}}(v_4), & j = 2, \dots, 4, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}^{(q)} : \begin{cases} \mathcal{A}^{(6)} \setminus \{p_{d_1^2 d_2^2}(v_4) = f_{d_1^2 d_2^2}(v_4), p(v_4)_{d_2 d_3^2} = f(v_4)_{d_2 d_3^2}\}, & q = 6, \\ \mathcal{A}^{(q)} \setminus \{p_{d_1^2 d_2^{q-4}}(v_4) = f_{d_1^2 d_2^{q-4}}(v_4), \dots, p_{d_1^{q-4} d_2^2}(v_4) = f_{d_1^{q-4} d_2^2}(v_4)\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{(q)} : \begin{cases} \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid 4 \leq u + v + w \leq q - 2; \\ 2 \leq w \leq q - 4; u, v \leq q - 4\}, & q \geq 6, \end{cases}$$

$$\mathcal{D}^{(q)} : \begin{cases} \{p_{d_2^2 d_3^2}(v_4) = f_{d_2^2 d_3^2}(v_4), p_{d_1 d_2^2 d_3}(v_4) = f_{d_1 d_2^2 d_3}(v_4)\}, & q = 6, \\ \left\{ \begin{aligned} &\{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid u + v + w = q - 2; 2 \leq w \leq q - 4; v \geq 1\} \\ &\cup \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid 4 \leq u + v + w \leq q - 3; 2 \leq w \leq q - 4\}, \end{aligned} \right. & q \geq 7, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_d^{(q)} : \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{D}^{(6)} \cup D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, 2, \\ &\left\{ \begin{aligned} &\{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid u + v + w = 3; \\ &u, v, w \leq 2; (u, v, w) \neq (0, 1, 2)\}, \quad d = 3, \\ &\cup \left\{ \begin{aligned} &\{p_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(v_4) = f_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(v_4), \rho = 1, 2; \\ &p_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(v_4) = f_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(v_4), \rho = 0, 1\}, \quad d = 5, \\ &\{p_{d_1^2 d_2}(v_4) = f_{d_1^2 d_2}(v_4); p_{d_1 d_2^2}(v_4) = f_{d_1 d_2^2}(v_4)\}, \quad d = 7, \\ &\emptyset, \quad d = 9, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. & q = 6, \\ \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{D}^{(q)} \cup D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, 3, \cup \{p_{d_1^\rho}(v_4) = f_{d_1^\rho}(v_4), \rho = 4, \dots, q - 4\} \\ &\cup \{p_{d_1^\rho d_m}(v_4) = f_{d_1^\rho d_m}(v_4), \rho = 3, \dots, q - 4; m = 2, 3\}, \quad q \geq 7. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

**Theorem 9.6:**

Sei  $q \geq 6$ ,  $\Delta$  wie in Paragraph 9.1 konstruiert und  $\mathcal{H}^{(q)}$  die Menge aller in den Knoten von  $\Delta$  gewählter Interpolationsbedingungen. Dann ist  $\mathcal{H}^{(q)}$  eine Hermite-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion der Mengen  $\mathcal{A}^{(q)}$ ,  $\mathcal{B}^{(q)}$ ,  $\mathcal{C}^{(q)}$ ,  $\mathcal{D}^{(q)}$  und  $\mathcal{E}_d^{(q)}$ ,  $d = 3, 5, 7, 9$ , gilt

$$\#\mathcal{H}^{(q)} = \#\mathcal{M}^{(q)} = \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)), \quad q \geq 6.$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $f \equiv 0$  und für alle Tetraeder  $T \in \Delta$  das Polynom  $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$  gegeben. Auf dem Starttetraeder  $T_0 = \Delta(v_1, \dots, v_4)$  implizieren die Interpolationsbedingungen in  $v_4$ , dass  $p^{[T_0]} \equiv 0$ . Sei jetzt für ein  $n \in \{1, \dots, k\}$  bereits gezeigt, dass  $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$ , dann betrachten wir  $s$  auf  $\Omega_n$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:** Anhängen einer Kette;

Sei o.B.d.A.  $k_n \geq 2$ . Für jede Dreiecksfläche  $T \in F(\Delta_n)$  des Tetraeders  $T_{n,0}$  ist  $s|_T \in \mathcal{P}_q$  ein

bivariates Polynom. Die Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{A}^{(q)}$  in  $w_{n,1}$  und die  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen in  $F_B(\Delta_{n-1})$  sowie die Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten von  $T_{n,0}$  implizieren daher  $s|_T \equiv 0$  für jede Seitenfläche  $T$  von  $T_{n,0}$ . Somit gibt es ein trivariates Polynom  $q^{[T_{n,0}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,0}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,0}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,0}]}(z), \quad z \in T_{n,0},$$

wobei  $h_4 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_4(x, y, u) = a_4x + b_4y + c_4u + d_4 = 0\}$  eine Ebene durch  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,0})$  ist, und  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_jx + b_jy + c_ju + d_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , Ebenen durch die anderen Seitenflächen von  $T_{n,0}$  sind. Aus den verbleibenden Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{A}^{(q)}$  in  $w_{n,1}$  folgt  $q^{[T_{n,0}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{n,0}]} \equiv 0$ . Analoge Argumentation auf den Tetraedern  $T_{n,m}$ ,  $m = 1, \dots, k_n - 2$ , liefert  $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n - 2$ . Auf dem Tetraeder  $T_{n,k_n-1}$  ergibt für  $q = 6$  die Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n}$  mit den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{B}^{(6)}$ , dass  $D^r p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ . Die Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n+1}$  impliziert daher  $s|_{[w_{n,k_n}, w_{n,k_n+1}]} \equiv 0$  und mit den verbleibenden Bedingungen in  $\mathcal{B}^{(6)}$  nach Lemma 9.5 schließlich  $D^3 p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ . Für  $q \geq 7$  folgt aus der Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n}$  und den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{B}^{(q)}$ , dass  $D^r p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ . Da die drei Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$ ,  $i = k_n - 1, k_n, k_n + 1$ , in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, folgt aus der  $C^1$ -Stetigkeit über diesen Flächen  $D^2 p^{[T_{n,k_n-1}]}(z) \equiv 0$  für alle  $z \in [v_{n-1,1}, v_{n-1,2}]$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n-1})$ , die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,1}$ ,  $v_{n-1,2}$  und  $w_{n,k_n-1}$  und die Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{B}^{(q)}$  liefern daher  $s|_T \equiv 0$  für alle Seitenflächen  $T$  von  $T_{n,k_n-1}$ . Mit analoger Argumentation wie auf  $T_{n,0}$  folgt  $p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ .

Auf dem Tetraeder  $T_{n,k_n}$  gibt es wegen der Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten, der  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$ ,  $i = k_n, k_n + 1$ , und den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{C}^{(q)}$  im Knoten  $w_{n,k_n}$  ein Polynom  $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,k_n}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3^2(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n}.$$

Dabei sind  $h_3 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_3(x, y, u) = a_3x + b_3y + c_3u + d_3 = 0\}$  und  $h_4 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_4(x, y, u) = a_4x + b_4y + c_4u + d_4 = 0\}$  Ebenen durch  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$  bzw.  $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1})$  und  $h_i = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_i(x, y, u) = a_ix + b_iy + c_iu + d_i = 0\}$ ,  $i = 1, 2$ , Ebenen durch die anderen beiden Seitenflächen von  $T_{n,k_n}$ . Die verbleibenden Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{C}^{(q)}$  implizieren  $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ , folglich  $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt daher  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$ .

### Fall 2: Anhängen einer Halbzelle;

Seien  $d_{m,w}, d_{w,m}$ ,  $m = 0, \dots, k_n$ , Einheitsvektoren entlang  $e_{m,w} = [v_{n-1,m}, w_{n,1}]$  bzw.  $e_{w,m} = [w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ , sowie  $d_{i,j}$ ,  $i, j = 0, \dots, k_n$ , Einheitsvektoren entlang  $e_{i,j} = [v_{n-1,i}, v_{n-1,j}]$ . Wegen der  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen in  $F_B(\Delta_{n-1})$  gilt  $D^r p^{[T_{n,m}]}(z) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , für alle Punkte  $z$  auf dem Rand von  $\Omega_{n-1}$ . Die Supersplineeigenschaften in den Knoten  $v_{n-1,j}$ ,  $j = 0, \dots, k_n$ , liefert außerdem  $D^3 p^{[T_{n,m}]}(v_{n-1,0}) \equiv D^3 p^{[T_{n,m}]}(v_{n-1,m}) \equiv 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ . Für  $q = 6$  folgt aus den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{E}_d^{(q)}$ ,  $d \in \{3, 5, 7, 9\}$ , dass  $D^r p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , und somit  $s|_{e_{m,w}} \equiv 0$ ,  $m = 0, \dots, k_n$ . Die restlichen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{E}_d^{(q)}$ , implizieren nach Lemma 9.5  $D^3 p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) \equiv$

0,  $m = 1, \dots, k_n$ . Für  $q \geq 7$  folgt aus der Supersplineeigenschaft in  $w_{n,1}$  und den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{E}_d^{(q)}$ , dass  $D^r p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ .

Da für  $m = 1, \dots, k_n$  die drei Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$ ,  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$  und  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m+1}, v_{n-1,m+2})$  in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, ergibt die  $C^1$ -Stetigkeit über diesen Kanten  $D^2 p^{[T_{n,m}]}(z_m) \equiv 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n$  für alle Punkte  $z_m \in [v_{n-1,0}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ . Die Interpolationsbedingungen  $p_{d_{w,0}}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ ,  $i = 4, \dots, q-4$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , sowie  $p_{d_{w,0}^i d_{w,m}}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ ,  $i = 3, \dots, q-4$ ,  $m = 1, 2$  in  $\mathcal{E}_d^{(q)} \setminus \mathcal{D}^{(q)}$  auf  $T_{n,1}$  implizieren mit der  $C^1$ -Stetigkeit über  $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ , dass  $p_{d_{w,0}^i d_{w,m}}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1})$ ,  $i = 3, \dots, q-4$ ,  $m = 3, \dots, k_n$ . Die Bedingungen in  $\mathcal{D}^{(q)} \subset \mathcal{E}_d^{(q)}$  auf  $T_{n,1}$  ergeben  $s|_T \equiv 0$  für alle Seitenflächen  $T$  von  $T_{n,1}$ . Somit gibt es ein Polynom  $q^{[T_{n,1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,1}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,1}]}(z), \quad z \in T_{n,0},$$

wobei  $h_4 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_4(x, y, u) = a_4 x + b_4 y + c_4 u + d_4 = 0\}$  eine Ebene durch  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,1}, v_{n-1,2})$  und  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , Ebenen durch die anderen Seitenflächen von  $T_{n,1}$  sind. Da  $d$  ungerade ist, folgt aus  $p_{d_{w,0}^i d_{w,m}^2}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ ,  $i = 2, \dots, q-4$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , analog Lemma 2.5 durch ein lineares

Gleichungssystem  $p_{d_{w,0}^i d_{w,m} d_{w,m+1}}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ ,  $i = 2, \dots, q-4$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , ( $d_{w,k_n+1} = d_{w,1}$ ).

Die restlichen Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{D}^{(q)} \subset \mathcal{E}_d^{(q)}$  auf  $T_{n,1}$  implizieren  $q^{[T_{n,1}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{n,1}]} \equiv 0$ . Mit analoger Argumentation folgt aus der  $C^1$ -Stetigkeit über den Flächen  $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , der Supersplineeigenschaft in  $w_{n,1}$  und den Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{D}^{(q)}$  auf  $T_{n,m}$ ,  $m = 2, \dots, k_n$ , dass  $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 2, \dots, k_n$ . Insgesamt gilt daher  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$ .

#

## 9.4 Lagrange-Interpolation

Im Folgenden geben wir Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ ,  $q \geq 6$ , auf der in Abschnitt 9.1 konstruierten Klasse von Zerlegungen an. Dazu wählen wir Interpolationspunkte im Starttetraeder und induktiv in den Tetraedern der angehängten Elemente. Für den Fall, dass im Induktionsschritt eine Kette angehängt wird, definieren wir Punktmenge  $\mathcal{Q}^{(q)}$ ,  $\mathcal{A}^{(q)}$ ,  $\mathcal{B}^{(q)}$  und  $\mathcal{C}^{(q)}$ , die wir in gleicher Weise den Tetraedern von  $\Delta$  zuordnen wie in Paragraph 9.2 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Wird an die Subtetraederzerlegung eine Halbzelle angehängt, so wählen wir Interpolationspunkte in den Tetraedern explizit. In beiden Fällen wird der interpolierende Spline zuerst auf den Kanten, dann auf den Seitenflächen und zuletzt im Innern der Tetraeder bestimmt.

Wir definieren zunächst einige Lagrange-Interpolationsmengen für bivariate Polynome. Sei  $q \geq 6$ ,  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck mit Kanten  $e_{i,j} := [v_i, v_j]$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ,

und das bivariate Polynom  $p \in \mathcal{P}_q$  auf  $T$  gegeben. Ferner gebe es existierende Hermite-Interpolationsbedingungen über Kanten bzw.  $C^3$ -Hermite-Bedingungen in Eckpunkten von  $T$ , die wir kurz als  $C^r$ -Bedingungen,  $r \in \{0, \dots, 2\}$ , bzw. Supersplinebedingungen bezeichnen. Wir legen Punktmengen  $\mathcal{L}^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , wie folgt fest (vgl. Abbildung 62):

- $\mathcal{L}^1$  :  $v_3$ , jeweils  $q - 4$  Punkte im Innern von  $e_{1,3}$ ,  $e_{2,3}$  und  $g_1 := [v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$  sowie für  $j = 2, \dots, q - 4$  genau  $j$  Punkte auf einer zu  $g_1$  parallelen Strecke  $g_j$  im Innern von  $T$ , falls eine  $C^1$ -Bedingung über  $e_{1,2}$  und Supersplinebedingungen in  $v_1$  und  $v_2$  existieren;
- $\mathcal{L}^2$  :  $\mathcal{L}^1$  ohne die Punkte auf  $e_{1,3}$ , falls eine  $C^1$ -Bedingung über  $e_{1,2}$ , eine  $C^0$ -Bedingung über  $e_{1,3}$  und Supersplinebedingungen in  $v_1$  und  $v_2$  existieren;
- $\mathcal{L}^3$  :  $\mathcal{L}^1$  ohne die Punkte auf  $e_{1,3}$  und  $e_{2,3}$ , falls eine  $C^1$ -Bedingung über  $e_{1,2}$ ,  $C^0$ -Bedingungen über  $e_{1,3}$  und  $e_{2,3}$  sowie Supersplinebedingungen in  $v_1$  und  $v_2$  existieren;
- $\mathcal{L}^4$  :  $v_3$ , jeweils  $q - 4$  Punkte im Innern von  $e_{1,3}$  und  $e_{2,3}$  sowie  $\binom{q-3}{2}$  Punkte im Innern von  $T$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$ , falls eine  $C^2$ -Bedingung über  $e_{1,2}$  und Supersplinebedingungen in  $v_1$  und  $v_2$  existieren;
- $\mathcal{L}^5$  :  $(q - 7)_+$  Punkte auf  $e_{2,3}$ ,  $q - 5$  Punkte auf  $g_1 := [v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ , sowie für  $j = 2, \dots, q - 5$  genau  $j$  Punkte auf einer zu  $g_1$  parallelen Strecke  $g_j$  im Innern von  $T$ , falls  $C^1$ -Bedingungen über  $e_{1,2}$  und  $e_{1,3}$  sowie Supersplinebedingungen in  $v_2$  und  $v_3$  existieren;
- $\mathcal{L}^6$  :  $\mathcal{L}^5$  ohne die Punkte im Innern von  $e_{2,3}$ , falls  $C^1$ -Bedingungen über  $e_{1,2}$  und  $e_{1,3}$ , eine  $C^0$ -Bedingung über  $e_{2,3}$  und Supersplinebedingungen in  $v_2$  und  $v_3$  existieren;
- $\mathcal{L}^7$  : für  $j = 2, \dots, q - 5$  jeweils  $j$  Punkte auf einer zu  $e_{1,2}$  parallelen Strecke  $g_j$  im Innern von  $T$ , falls eine  $C^2$ -Bedingung über  $e_{1,2}$ , eine  $C^1$ -Bedingung über  $e_{1,3}$ , eine  $C^0$ -Bedingung über  $e_{2,3}$  und Supersplinebedingungen in  $v_2$  und  $v_3$  existieren.

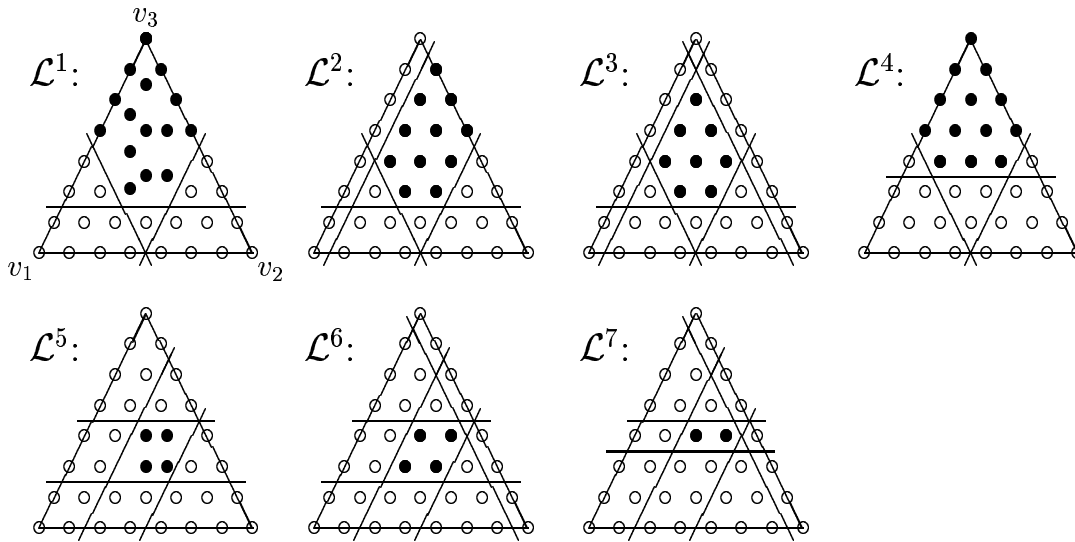


Abb. 62:  $C^0$ - bis  $C^3$ -Bedingungen und Lagrange-Punkte  $\bullet$  in  $\mathcal{L}^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , für  $q = 7$ .

**Lemma 9.7:**

Das in  $\mathcal{L}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, 7\}$ , auf  $T$  interpolierende Polynom  $p \in \mathcal{P}_q$  mit den entsprechenden Hermite-Bedingungen über den Kanten und Eckpunkten von  $T$  ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:**

Durch die Interpolationsbedingungen über den Kanten und Eckpunkten von  $T$  existieren neben den Lagrange-Interpolationsbedingungen in  $\mathcal{L}^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , zusätzliche Hermite-Bedingungen. Es ist leicht zu verifizieren, dass die Gesamtanzahl dieser Interpolationsbedingungen jeweils der Dimension von  $\mathcal{P}_q$  entspricht. Es reicht daher zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $p \in \mathcal{P}_q$  gegeben und  $p(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, 7\}$ . Ferner seien homogene  $C^0$ - bis  $C^3$ -Interpolationsbedingungen über den entsprechenden Kanten und Knoten gegeben. Dann gibt es ein Polynom  $q \in \mathcal{P}_{q-\lambda}$ , so dass sich  $p$  schreiben lässt als

$$p(z) = \tilde{l}_1^{\tilde{\lambda}_1}(z) \cdot \tilde{l}_2^{\tilde{\lambda}_2}(z) \cdot \tilde{l}_3^{\tilde{\lambda}_3}(z) \cdot l_1^{\lambda_1}(z) \cdot \dots \cdot l_{q-4}^{\lambda_{q-4}}(z) \cdot q(z), \quad z \in T,$$

$(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{q-4} = \lambda)$ , wobei  $g_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid l_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, q-4$ , und  $\tilde{g}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{l}_j(x, y) = \tilde{a}_j x + \tilde{b}_j y + \tilde{c}_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 3$  eine Gerade durch  $e_{j,j+1}$ , ( $v_4 = v_1$ ), ist. Die verbleibenden Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , im Innern von  $T$  implizieren in allen Fällen  $q \equiv 0$  und damit insgesamt  $p \equiv 0$ .

#

Wir definieren nun Punktmengen für im Induktionsschritt angehängte Ketten. Diese Mengen werden in analoger Weise den Tetraedern von  $\Delta$  zugeordnet wie in Paragraph 9.2 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Sei  $T := \Delta(v_1, \dots, v_4)$  ein Tetraeder, dann bezeichnen wir mit  $T^l := \Delta(v_i, v_j, v_k)$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , wobei  $1 \leq l \neq i, j, k \leq 4$ , die dem Eckpunkt  $v_l$  gegenüberliegende Seitenfläche von  $T$  und mit  $e_{i,j} := [v_i, v_j]$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , die Kanten von  $T$ . Wir setzen

$\mathcal{Q}^{(q)}$ :  $\binom{q+3}{3}$  Punkte im Innern von  $T$  zur eindeutige Interpolation mit  $\mathcal{P}_q$ . Dazu lege z.B.  $q+1$  parallele Ebenen  $E_1, \dots, E_{q+1}$  in  $T$ , lege  $j$  parallele Strecken  $a_{j,1}, \dots, a_{j,j}$  auf jede Ebene  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, q+1$ , und wähle  $i$  Punkte auf jeder Strecke  $a_{j,i}$ ,  $i = 1, \dots, j$ .

$\mathcal{A}^{(q)}$ :  $\binom{q}{2} - 6$  Punkte auf  $T^1$ ,  $\binom{q-1}{2} - 4$  Punkte auf  $T^2$ ,  $\binom{q-2}{2} - 2$  Punkte auf  $T^3$  nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^1$ ,  $\mathcal{L}^2$  bzw.  $\mathcal{L}^3$  und  $\binom{q-2}{3}$  Punkte im Innern von  $T$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$ .

$\mathcal{B}^{(q)}$ :  $q = 6$ : 8 Punkte auf  $T^3$ , 6 Punkte auf  $T^1$  und 4 Punkte auf  $T^2$  nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^4$ ,  $\mathcal{L}^2$  bzw.  $\mathcal{L}^3$ . Zusätzlich 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte auf einer nicht durch  $w_{n,k_n}$  gehenden Ebene im Innern von  $T$ .

$q \geq 7$ :  $\binom{q}{2} - 2$  Punkte auf  $T^3$ ,  $\binom{q-1}{2} - 4$  Punkte auf  $T^1$ ,  $\binom{q-2}{2} - 2$  Punkte auf  $T^2$  nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^4$ ,  $\mathcal{L}^2$  bzw.  $\mathcal{L}^3$  und  $\binom{q-2}{3}$  Punkte im Innern von  $T$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$ .

$\mathcal{C}^{(q)}$ :  $q = 6$ : je ein Punkt im Innern von  $T^1$ ,  $T^2$  und  $T$ .

$q \geq 7$ :  $\binom{q-2}{2} - 6$  Punkte auf  $T^1$ ,  $\binom{q-3}{2} - 2$  Punkte auf  $T^2$  nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^5$  bzw.  $\mathcal{L}^6$  und  $\binom{q-3}{3}$  Punkte im Innern von  $T$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ .

Sei  $q \geq 6$ ,  $\mathcal{L}_{n-1}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$  und  $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 0, \dots, k_n\}$  die Tetraederzerlegung die entsteht, indem an  $\Delta_{n-1}$  eine Kette angehängt wird. Ferner sei  $\mathcal{L}_{K_n}^{(q)}$  die Menge aller Punkte, die auf den Tetraedern  $T_{n,0}, \dots, T_{n,k_n}$  gewählt werden und  $\mathcal{L}_{n,K}^{(q)} := \mathcal{L}_{n-1}^{(q)} \cup \mathcal{L}_{K_n}^{(q)}$ .

**Lemma 9.8:**

Sei  $q \geq 6$ . Dann ist  $\mathcal{L}_{n,K}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ .

**Beweis:**

Nach Konstruktion der Mengen  $\mathcal{A}^{(q)}$ ,  $\mathcal{B}^{(q)}$  und  $\mathcal{C}^{(q)}$  gilt  $\#\mathcal{L}_{n,K}^{(q)} = \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n))$ . Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also  $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$  mit  $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$  gegeben, und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \mathcal{L}_{K_n}^{(q)}$ . Wir setzen  $p^{[T]} \equiv s|_T \in \mathcal{P}_q$  für alle Tetraeder  $T \in \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$  und zeigen  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$ .

Sei o.B.d.A.  $k_n \geq 2$ . Betrachten wir  $T_{n,0}$ . Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{A}^{(q)}$  auf den Seitenflächen von  $T_{n,0}$ , die  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $T_{n,0}^4$  sowie die Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,1}$ ,  $v_{n-1,2}$  und  $w_{n,0}$  implizieren nach Lemma 9.7, dass  $s|_{T_{n,0}^i} \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Daher existiert ein Polynom  $q^{[T_{n,0}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,0}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,0}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,0}]}(z), \quad z \in T_{n,0},$$

wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,0}^j$  ist. Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{A}^{(q)}$  im Innern von  $T_{n,0}$  liefern  $q^{[T_{n,0}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{n,0}]} \equiv 0$ . Mit analogem Argument folgt  $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n - 2$ .

Da die drei Flächen  $T_{n,k_n-1}^4$ ,  $T_{n,k_n-1}^3$  und  $T_{n,k_n}^4$  in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, folgt  $D^2 p^{[T_{n,k_n-1}]}(z) = 0$  für alle  $z \in [v_{n-1,0}, v_{n-1,1}]$ . Mit den Interpolationspunkten in  $\mathcal{B}^{(q)}$  auf den Seitenflächen von  $T_{n,k_n-1}$ , der  $C^1$ -Stetigkeit über der Fläche  $T_{n,k_n-1}^4$  sowie der Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten von  $T_{n,k_n-1}$  folgt nach Lemma 9.7  $s|_{T_{n,k_n-1}^i} \equiv 0$ ,

$i = 1, \dots, 4$ . Daher gibt es ein Polynom  $q^{[T_{n,k_n-1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,k_n-1}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n-1}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,k_n-1}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n-1},$$

wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,k_n-1}^j$  ist. Für  $q \geq 7$  folgt aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{B}^{(q)}$  im Innern von  $T_{n,k_n-1}$ , dass  $q^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ . Für  $q = 6$  impliziert die Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n}$ , dass  $D^r p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ . Aus der Supersplineeigenschaft in  $w_{n,k_n+1}$  folgt daher  $p|_{[w_{k_n}, w_{k_n+1}]}^{[T_{n,k_n}]}$   $\equiv 0$  und nach Lemma 9.5 schließlich  $D^3 p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ . Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{B}^{(6)}$  im Innern von  $T_{n,k_n-1}$  implizieren  $q^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ . Somit gilt  $p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$  für  $q \geq 6$ .

Auf dem Tetraeder  $T_{n,k_n}$  folgt aus der  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,k_n}^3$  und  $T_{n,k_n}^4$ , der Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,0}$ ,  $v_{n-1,1}$ ,  $w_{n,k_n}$  und  $w_{n,k_n+1}$  sowie den Interpolationspunkten in  $\mathcal{C}^{(q)}$  im Innern der Flächen  $T_{n,k_n}^1$  und  $T_{n,k_n}^2$  nach Lemma 9.7, dass  $s|_{T_{n,k_n}^i} \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Daher gibt es ein Polynom  $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,k_n}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3^2(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n},$$



wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,k_n}^j$  ist. Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{C}^{(q)}$  im Innern von  $T_{n,k_n}$  liefern  $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ , also  $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt damit  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$ .

#

Wir betrachten nun den Fall, dass im Induktionsschritt eine Halbzelle an die Subtetraederzerlegung angehängt wird. Sei  $\Delta_{v_{n-1,0}}$  eine Zelle auf dem Rand von  $\Omega_{n-1}$  mit Knoten  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$ ,  $k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$ . Im  $n$ -ten Schritt wird eine Halbzelle  $\{T_{n,m}, m = 1, \dots, k_n\}$  mit Tetraedern  $T_{n,m} := \Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}, w_{n,1})$ ,  $v_{n-1,k_n} = v_{n-1,1}$ , mit einem neuen Knoten  $w_{n,1}$  angehängt. Für jeden Tetraeder  $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$  seien wieder  $T^l = \Delta(v_i, v_j, v_k)$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , wobei  $1 \leq l \neq i, j, k \leq 4$ , die Seitenflächen von  $T$ . Dann setzen wir:

- $\mathcal{L}_1^{(6)}$ :  $w_{n,1}$  und je 2 Punkte im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 0, \dots, 2$ , sowie für  $k_n =$
- 3 : je 3 Punkte im Innern von  $T_{n,1}^2$  und  $T_{n,1}^3$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_1$  und 4 Punkte nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^3$  im Innern von  $T_{n,1}^1$ ;
  - 5 : je 3 Punkte im Innern von  $T_{n,1}^2$  und  $T_{n,1}^3$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_1$  und je einen Punkt im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$  und  $T_{n,1}^1$ ;
  - 7 : 3 Punkte im Innern von  $T_{n,1}^3$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_1$  und je einen Punkt im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 3, 4$ , und  $T_{n,1}^1$ ;
  - 9 : je einen Punkt im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 3, \dots, 5$ , und  $T_{n,1}^1$ ;
- $\mathcal{L}_1^{(q)}$ :  $q \geq 7$ :  $w_{n,1}$ , je  $q - 4$  Punkte im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 0, \dots, 2$ , je  $q - 7$  Punkte im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 3, \dots, k_n$ , sowie je  $\binom{q-3}{2}$  Punkte im Innern von  $T_{n,1}^2$  und  $T_{n,1}^3$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-5}$  und  $\binom{q-2}{2} - 2$  Punkte nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^3$  im Innern von  $T_{n,1}^1$ ;
- $\mathcal{L}_2^{(q)}$ : (i) je  $\binom{q-4}{2} - 1$  Punkte im Innern von  $T_{n,m}^3$ ,  $m = 3, \dots, k_n - 1$ , nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^7$  und für  $q \geq 7$  genau  $\binom{q-5}{2}$  Punkte im Innern von  $T_{n,k_n}^3$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-7}$ ;
- (ii) je  $\binom{q-3}{2} - 2$  Punkte im Innern von  $T_{n,m}^1 = \Delta(v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}, w_{n,1})$ ,  $m = 2, \dots, k_n - 1$ , nach Lemma 9.7  $\mathcal{L}^6$  und  $\binom{q-4}{2}$  Punkte im Innern von  $T_{n,k_n}^1$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ ;
- $\mathcal{L}_3^{(q)}$ : (i)  $q = 6$ : 2 nicht mit  $w_{n,1}$  und  $v_{n-1,0}$  in einer Ebene liegende Punkte im Innern von  $T_{n,1}$ ;
- $q \geq 7$ :  $\binom{q-2}{3} - 1$  Punkte im Innern von  $T_{n,1}$  auf  $q - 5$  parallelen, nicht durch  $v_{n-1,0}$  gehenden Ebenen  $\tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{q-4}$  mit je  $\binom{q+1}{2}$  Punkten auf  $\tilde{h}_q$ ,  $q = 2, \dots, q - 4$ , zur eindeutigen Interpolation mit dem bivariaten Polynomraum  $\mathcal{P}_{q-1}$ ;
- (ii) je  $\binom{q-3}{3}$  Punkte im Innern von  $T_{n,m}$ ,  $m = 2, \dots, k_n - 1$ , zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-6}$ ;
- (iii)  $q \geq 7$ :  $\binom{q-4}{3}$  Punkte im Innern von  $T_{n,k_n}$  zur eindeutigen Interpolation mit  $\mathcal{P}_{q-7}$ .

Es gelte  $q \geq 6$ . Sei  $\mathcal{L}_{n-1}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$  und  $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 1, \dots, k_n\}$  die aus  $\Delta_{n-1}$  entstehende Tetraederzerlegung, indem eine Halbzelle angehängt wird. Ferner sei  $\mathcal{L}_{n,H}^{(q)} := \mathcal{L}_{n-1}^{(q)} \cup \left(\bigcup_{i=1}^3 \mathcal{L}_i^{(q)}\right)$ .

**Lemma 9.9:**

Sei  $q \geq 6$ . Dann ist  $\mathcal{L}_{n,H}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ .

**Beweis:**

Nach Festlegung der Mengen  $\mathcal{L}_i^{(q)}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , gilt:

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^3 \mathcal{L}_i^{(q)}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} k_n + 19, & q = 6, \\ k_n \left[\binom{q-1}{3} - q - 3\right] + 3q + 1, & q \geq 7, \end{array} \right\} = \#(\mathcal{M}_n \setminus \mathcal{M}_{n-1}).$$

Daher reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei  $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$  mit  $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$  gegeben, und es gelte  $s(z) = 0$  für alle  $z \in \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{L}_i^{(q)}$ . Wir setzen  $p^{[T]} \equiv s|_T \in \mathcal{P}_q$  für alle  $T \in \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$  und zeigen  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,1}^4$  und die Supersplineeigenschaft in den Knoten  $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,2}$  implizieren  $D^r p^{[T_{n,1}]}(z) \equiv 0$ ,  $r = 0, 1$ , für alle  $z \in T_{n,1}^4$  sowie  $D^r p^{[T_{n,1}]}(v_{n-1,m}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ ,  $m = 0, \dots, 2$ . Da die drei Flächen  $T_{n,m}^4$ ,  $T_{n,m}^1$  und  $T_{n,m+1}^4$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ ,  $T_{n,k_n+1}^4 = T_{n,1}^4$ , in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, folgt aus  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,m}^1$ , dass  $D^2 p^{[T_{n,m}]}(z_m) \equiv 0$  für alle  $z_m \in [v_{n-1,0}, v_{n-1,m+1}]$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ . Wir zeigen nun  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ , für  $q = 6$ .

**$k_n = 3$ :** Nach Lemma 9.7 folgt aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  auf  $T_{n,1}^j$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , dass  $p|_{T_{n,1}^j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, 3$ . Daher gilt  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ . Die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,3}$  impliziert somit  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,3}]} \equiv 0$ . Nach Lemma 9.5 folgt  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ .

**$k_n = 5$ :** Aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  auf  $T_{n,1}^j$ ,  $j = 2, 3$ , folgt  $p|_{T_{n,1}^j} \equiv 0$ ,  $j = 2, 3$ . Dies impliziert  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, 1$ . Der Interpolationspunkt im Innern von  $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$  und die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,3}$  liefern daher  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,3}]} \equiv 0$ , also  $D^2 s(w_{n,1}) \equiv 0$ . Folglich impliziert die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,4}$  und  $v_{n-1,5}$ , dass  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 4, 5$ . Nach Lemma 9.5 ergibt sich  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ .

**$k_n = 7$ :** Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  auf  $T_{n,1}^3$  implizieren  $p|_{T_{n,1}^3} \equiv 0$ . Die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,3}$  und  $v_{n-1,4}$  und die Punkte in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  auf  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 2, \dots, 4$ , liefern daher  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 2, \dots, 4$ , also  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 2$ . Aus der Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,5}, \dots, v_{n-1,7}$  folgt  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 5, \dots, 7$ , und nach Lemma 9.5 schließlich  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ .

**$k_n = 9$ :** Aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  auf  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 0, \dots, 2$ , ergibt sich  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 0, \dots, 2$ , und damit  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, 1$ . Die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,m}$ ,  $m = 3, \dots, 5$ , und die Punkte in  $\mathcal{L}_1^{(q)}$  auf  $[w_{n,1}, v_{n-1,m}]$ ,  $m = 3, \dots, 5$ ,

liefern daher  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 3, \dots, 5$ , also  $D^2 s(w_{n,1}) \equiv 0$ . Die Supersplineeigenschaft in  $v_{n-1,m}$ ,  $m = 6, \dots, 9$ , impliziert  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 6, \dots, 9$ , und nach Lemma 9.5 schließlich  $D^r s(w_{n,1}) \equiv 0$ ,  $r = 0, \dots, 3$ .  $\square$

Für  $q \geq 7$  folgt nach Lemma 9.7 aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_1^{(q)}$  auf  $T_{n,1}^j$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , dass  $p|_{T_{n,1}^j} \equiv 0$ ,  $j = 1, \dots, 3$ , und  $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 3, \dots, k_n$ . Somit gilt  $s|_e \equiv 0$  für alle  $e \in E(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1})$ .

Mit den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  (i) im Innern von  $T_{n,m}^3$ ,  $m = 3, \dots, k_n - 1$ , und der  $C^1$ -Stetigkeit über  $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$  folgt  $p|_{T_{n,m}^3} \equiv 0$ ,  $m = 3, \dots, k_n - 1$ . Da die drei Flächen  $T_{n,k_n-1}^3$ ,  $T_{n,k_n-1}^2$  und  $T_{n,k_n}^3$  in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, impliziert die  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,k_n-1}^2$ , dass  $D^2 p|_{T_{n,k_n-1}^2}(z) \equiv 0$  für alle  $z \in [v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ . Aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  (i) im Innern von  $T_{n,k_n-1}^2$  folgt daher  $p|_{T_{n,k_n-1}^2} \equiv 0$ . Für  $q = 6$

impliziert der Punkt in  $\mathcal{L}_1^{(6)}$  im Innern von  $T_{n,1}^1$ , dass  $p|_{T_{n,1}^1} \equiv 0$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über  $[v_{n-1,2}, w_{n,1}]$  und  $[v_{n-1,2}, v_{n-1,3}]$  und die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  (ii) im Innern von  $T_{n,2}^1$  ergeben  $p|_{T_{n,2}^1} \equiv 0$ . Mit analogem Argument folgt  $p|_{T_{n,m}^1} \equiv 0$ ,  $m = 3, \dots, k_n - 1$ . Die  $C^1$ -Stetigkeit über  $[v_{n-1,k_n-1}, w_{n,1}]$ ,  $[v_{n-1,k_n-1}, v_{n-1,k_n}]$  und  $[v_{n-1,k_n}, w_{n,1}]$  und die Punkte in  $\mathcal{L}_2^{(q)}$  (ii) im Innern von  $T_{n,k_n}^1$  implizieren schließlich  $p|_{T_{n,k_n}^1} \equiv 0$ . Daraus folgt  $s|_T \equiv 0$  für alle  $T \in F(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1})$ .

Auf dem Tetraeder  $T_{n,1}$  existiert wegen der  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,1}^4$  ein Polynom  $q^{[T_{n,1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ , so dass sich  $p|_{T_{n,1}}$  schreiben lässt als

$$p|_{T_{n,1}}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,1}]}(z), \quad z \in T_{n,1},$$

wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,1}^j$  ist. Sei  $d$  ein Einheitsvektor entlang  $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$  und  $d_m$  für  $m = 1, \dots, k_n$ ,  $d_{k_n+1} = d_1$ , ein Einheitsvektor entlang  $[v_{n-1,0}, v_{n-1,m}]$ . Aus  $s_{d^2 d_m^2}(v_{n-1,0}) = 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ , ergibt sich durch ein lineares Gleichungssystem (vgl. Hermite-Interpolation)  $s_{d^2 d_m d_{m+1}}(v_{n-1,0}) = 0$ ,  $m = 1, \dots, k_n$ . Dies impliziert  $q^{[T_{n,1}]}(v_{n-1,0}) = 0$ . Für  $q = 6$  gilt wegen  $D^3 s(w_{n,1}) \equiv 0$ , dass  $q^{[T_{n,1}]}(w_{n,1}) = 0$ . Aus den beiden Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_3^{(6)}$  (i) im Innern von  $T_{n,1}$  ergibt sich daher  $q^{[T_{n,1}]} \equiv 0$  und somit  $p|_{T_{n,1}} \equiv 0$ . Gilt  $q \geq 7$ , so folgt aus den Interpolationspunkten in  $\mathcal{L}_3^{(6)}$  (i) auf den Ebenen  $\tilde{h}_j$ ,  $j = 2, \dots, q-4$ , die Existenz eines Polynoms  $\tilde{q}^{[T_{n,1}]} \in \mathcal{P}_0$ , so dass sich  $p|_{T_{n,1}}$  schreiben lässt als

$$p|_{T_{n,1}}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3(z) \cdot E_4^2(z) \cdot \tilde{E}_2(z) \cdot \dots \cdot \tilde{E}_{q-4}(z) \cdot \tilde{q}^{[T_{n,1}]}(z), \quad z \in T_{n,1},$$

wobei  $\tilde{h}_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{E}_j(x, y, u) = \tilde{a}_j x + \tilde{b}_j y + \tilde{c}_j u + \tilde{d}_j = 0\}$ ,  $j = 2, \dots, q-4$ . Aus  $\tilde{q}^{[T_{n,1}]}(w_{n,1}) = q^{[T_{n,1}]}(w_{n,1}) = 0$  folgt  $q^{[T_{n,1}]} \equiv 0$  und damit  $p|_{T_{n,1}} \equiv 0$ .

Auf  $T_{n,2}$  gibt es wegen der  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,2}^3$  und  $T_{n,2}^4$  ein Polynom  $q^{[T_{n,2}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ , so dass sich  $p|_{T_{n,2}}$  schreiben lässt als

$$p|_{T_{n,2}}(z) = E_1(z) \cdot E_2(z) \cdot E_3^2(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,2}]}(z), \quad z \in T_{n,2},$$

wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,2}^j$  ist. Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  (ii) im Innern von  $T_{n,2}$  implizieren  $q^{[T_{n,2}]} \equiv 0$  und damit  $p^{[T_{n,2}]} \equiv 0$ . Mit analogem Argument gilt  $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ ,  $m = 3, \dots, k_n - 1$ . Auf  $T_{n,k_n}$  folgt für  $q = 6$  aus der  $C^1$ -Stetigkeit über  $T_{n,k_n}^j$ ,  $j = 2, \dots, 4$ , dass  $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ . Für  $q \geq 7$  gibt es ein Polynom  $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-7}$ , so dass sich  $p^{[T_{n,k_n}]}$  schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1(z) \cdot E_2^2(z) \cdot E_3^2(z) \cdot E_4^2(z) \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n},$$

wobei  $h_j = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid E_j(x, y, u) = a_j x + b_j y + c_j u + d_j = 0\}$  für  $j = 1, \dots, 4$  eine Ebene durch  $T_{n,k_n}^j$  ist. Die Interpolationspunkte in  $\mathcal{L}_3^{(q)}$  (iii) im Innern von  $T_{n,k_n}$  liefern  $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ , also  $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ . Insgesamt gilt  $s|_{\Omega_n} \equiv 0$  und damit die Behauptung.

#

Sei  $\Delta$  eine in Paragraph 9.1 konstruierte Tetraederzerlegung und  $\mathcal{L}^{(q)}$  für  $q \geq 6$  die Menge aller Punkte, die im Starttetraeder und in den Tetraedern der angehängten Ketten und Halbzellen gewählt werden.

**Theorem 9.10:**

Sei  $q \geq 6$ . Dann ist  $\mathcal{L}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ .

**Beweis:**

Der Beweis verläuft induktiv. Die im Starttetraeder  $T_0 = \Delta_0$  gewählten Punkte entsprechend  $\mathcal{Q}^{(q)}$  bilden nach Voraussetzung eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{P}_q$ . Sei jetzt für ein  $n \in \{1, \dots, k\}$  bereits gezeigt, dass  $\mathcal{L}_{m-1}^{(q)} \subset \mathcal{L}^{(q)}$  eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$  ist. Entsteht  $\Delta_n$  aus  $\Delta_{n-1}$  durch Anhängen einer Kette, so bildet  $\mathcal{L}_n^{(q)} = \mathcal{L}_{n,K}^{(q)} \subset \mathcal{L}^{(q)}$  nach Lemma 9.8 eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ . Entsteht  $\Delta_n$  aus  $\Delta_{n-1}$  durch Anhängen einer Halbzelle, so bildet  $\mathcal{L}_n^{(q)} = \mathcal{L}_{n,H}^{(q)} \subset \mathcal{L}^{(q)}$  nach Lemma 9.9 eine Lagrange-Interpolationsmenge für  $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ . Da  $\Delta$  nur mithilfe dieser beiden Elemente konstruiert wird, folgt die Behauptung.

#

# Die Dimension trivariater $C^1$ -Splines auf $\Delta^1$ -Tetraederzerlegungen

Im Folgenden beschreiben wir ein Verfahren von Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] zur Bestimmung der Dimension von  $C^1$ -Splines beliebigen Grades auf der Tetraederzerlegung einer gleichmäßigen Würfelpartition. Bei dieser Zerlegung, die aus einer Verallgemeinerung der bivariaten  $\Delta^1$ -Triangulierung entsteht, wird jeder Würfel durch drei Schnittebenen in sechs Tetraeder unterteilt. Zunächst betrachten Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] die Zerlegung eines einzelnen Würfels und konstruieren minimal bestimmende Mengen für  $C^1$ -Splines beliebigen Grades. Darauf aufbauend konstruieren sie minimal bestimmende Mengen für  $C^1$ -Splines auf der gesamten Zerlegung, indem sie ähnlich der von Hangelbroek, Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [75] entwickelten Methode induktiv die Würfel der Partition durchlaufen. Abschließend geben Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] explizite Formeln für die Dimension von  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , an, die nur von der Anzahl der Eckpunkte, der Kanten, der Flächen und der Tetraeder von  $\Delta^1$  abhängen.

## Beschreibung der Tetraederzerlegung

Sei  $\diamond$  die gleichmäßige Zerlegung des würfelförmigen Grundgebiets  $\Omega = [0, n]^3 \subset \mathbb{R}^3$ , die dadurch entsteht, dass  $\Omega$  in jeder der drei Dimensionen des Raumes mit den  $n - 1$  äquidistant zu der Koordinatenebene parallelen Ebenen geschnitten wird, d.h. es gelte

$$\diamond = \{Q_{(i,j,k)} : Q_{(i,j,k)} = [i-1, i] \times [j-1, j] \times [k-1, k], \ i, j, k = 1, \dots, n\}.$$

Wird jeder dieser  $n^3$  Würfel zusätzlich durch die drei Ebenen  $x - y = i - j$ ,  $x - z = i - k$  und  $y - z = j - k$  geschnitten, so entsteht eine natürliche, gleichmäßige Tetraederzerlegung, bei der jeder Würfel in sechs Tetraeder unterteilt wird (vgl. Abbildung 63). Diese Tetraederzerlegung wird im Folgenden mit  $\Delta^1$  bezeichnet.

## Minimal bestimmende Mengen auf einem Würfel

Aufgrund der speziellen Struktur der Tetraederzerlegung  $\Delta^1$  lassen sich für beliebiges  $q \in \mathbb{N}$  die gleichverteilten Bézier-Bernstein-Punkte  $\mathcal{M}(\Delta^1)$  in einfacher Achsenschriftweise angeben (vgl. Abbildung 64). Für jeden Würfel  $Q_{(i,j,k)} \in \diamond$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , gilt

$$\mathcal{M}(\Delta_{Q_{(i,j,k)}}) = \left\{ P_{\alpha, \beta, \gamma}^{Q_{(i,j,k)}} : \alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, q \right\},$$

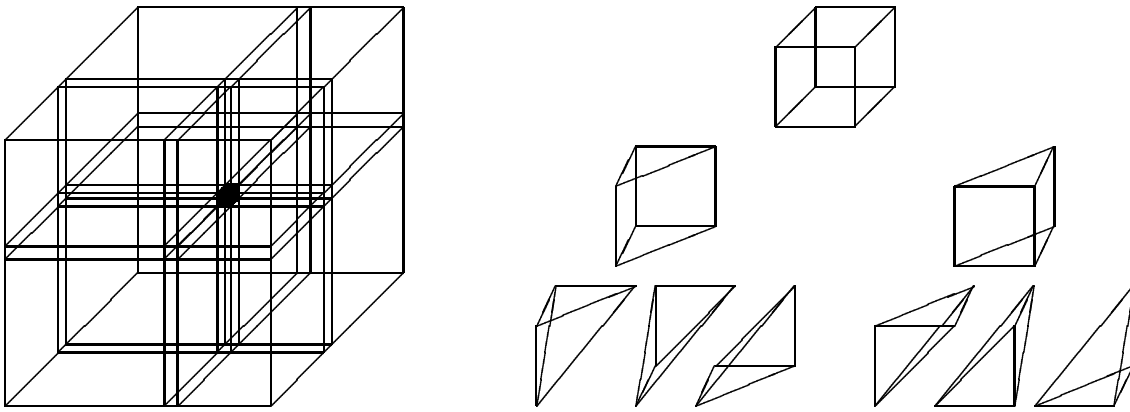


Abb. 63: Zerlegung  $\diamond$  (links) und Tetraederzerlegung  $\Delta^1$  eines Würfels (rechts).

wobei

$$P_{\alpha,\beta,\gamma}^{Q(i,j,k)} = \left( i - 1 + \frac{\alpha}{q}, j - 1 + \frac{\beta}{q}, k - 1 + \frac{\gamma}{q} \right)$$

für  $i, j, k = 1, \dots, n$  und  $\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, q$ . Insgesamt gilt also

$$\mathcal{M}(\Delta^1) = \bigcup_{i,j,k=1}^n \mathcal{M}(\Delta_{Q(i,j,k)}).$$

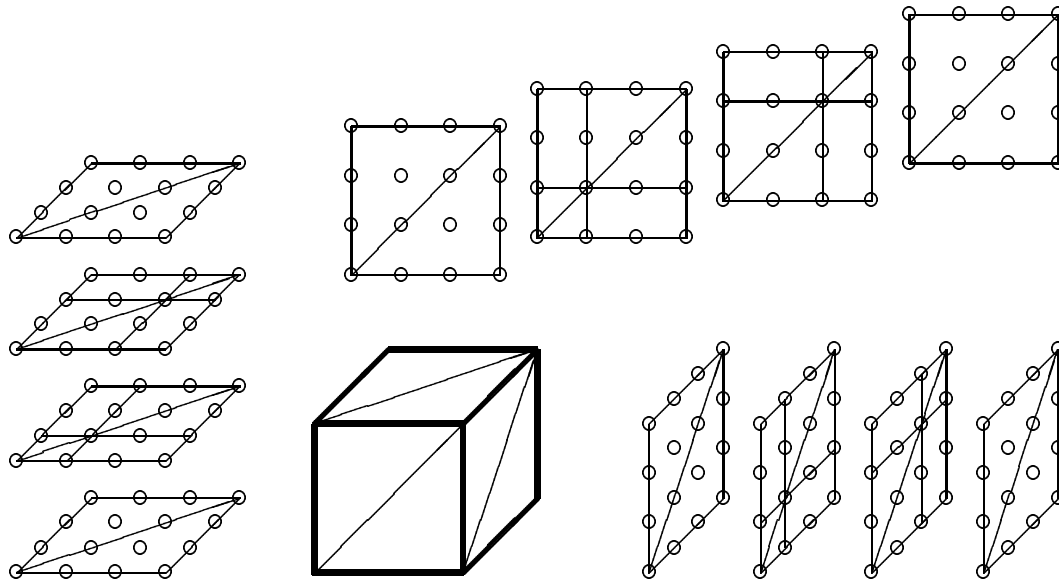


Abb. 64: Verschiedene Schichten von Bézier-Bernstein-Punkten eines Würfels für  $q = 3$ .

Die  $C^1$ -Differenzierbarkeit eines Splines auf  $\Delta^1$  über gemeinsame Dreiecksflächen benachbarter Tetraeder von  $\Delta^1$  ist wie folgt charakterisiert (vgl. Lemma 8.3).

**Lemma:**

Sei  $s \in \mathcal{S}_q^0(\Delta^1)$  mit Koeffizienten  $a_{\alpha,\beta,\gamma}^{Q(i,j,k)}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, q$ , gegeben. Dann gilt  $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$  genau dann, wenn für alle  $i, j, k = 1, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta = 0, \dots, q$ ,  $\alpha \neq q$ :

$$\begin{aligned} (i) \quad & a_{\beta,\alpha,\alpha}^{Q(i,j,k)} + a_{\beta,\alpha+1,\alpha+1}^{Q(i,j,k)} = a_{\beta,\alpha,\alpha+1}^{Q(i,j,k)} + a_{\beta,\alpha+1,\alpha}^{Q(i,j,k)}, \\ (ii) \quad & a_{\alpha,\beta,\alpha}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\beta,\alpha+1}^{Q(i,j,k)} = a_{\alpha,\beta,\alpha+1}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\beta,\alpha}^{Q(i,j,k)} \quad \text{und} \\ (iii) \quad & a_{\alpha,\alpha,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\alpha+1,\beta}^{Q(i,j,k)} = a_{\alpha,\alpha+1,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\alpha,\beta}^{Q(i,j,k)}, \end{aligned}$$

und für alle  $i, j, k = 1, \dots, n$ ,  $i \neq n$ ;  $\alpha, \beta = 0, \dots, q-1$ :

$$\begin{aligned} (iv) \quad & a_{q-1,\alpha,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{1,\alpha+1,\beta+1}^{Q(i+1,j,k)} = a_{q,\alpha,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{q,\alpha+1,\beta+1}^{Q(i,j,k)}, \\ (v) \quad & a_{\alpha,q-1,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,1,\beta+1}^{Q(j,i+1,k)} = a_{\alpha,q,\beta}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,q,\beta+1}^{Q(i,j,k)} \quad \text{und} \\ (vi) \quad & a_{\alpha,\beta,q-1}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\beta+1,1}^{Q(j,k,i+1)} = a_{\alpha,\beta,q}^{Q(i,j,k)} + a_{\alpha+1,\beta+1,q}^{Q(i,j,k)}. \end{aligned}$$

Zunächst konstruieren Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta_Q^1)$  auf der Zerlegung eines einzelnen Würfels  $Q = Q_{(1,1,1)}$ . Seien

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_1 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \gamma \leq \beta \leq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, q\}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_2 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \beta + 2 \leq \gamma \leq \alpha, \quad \alpha, \gamma = 0, \dots, q, \quad \beta = 0, \dots, q-2\}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_3 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \beta \leq \alpha \leq \gamma - 2, \quad \alpha, \beta = 0, \dots, q, \quad \gamma = 2, \dots, q\}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_4 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \gamma \leq \alpha \leq \beta - 2, \quad \alpha, \gamma = 0, \dots, q, \quad \beta = 2, \dots, q\}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_5 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \alpha + 2 \leq \gamma < \beta, \quad \alpha = 0, \dots, q-2, \quad \beta, \gamma = 0, \dots, q\} \\ &\quad \cup \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \alpha + 3 \leq \beta, \quad \alpha = 0, \dots, q-3, \quad \beta = 0, \dots, q\} \quad \text{und} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_6 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} : \alpha + 2 \leq \beta \leq \gamma - 2, \quad \alpha = 0, \dots, q-2, \quad \beta = 0, \dots, q, \quad \gamma = 2, \dots, q\}. \end{aligned}$$

**Lemma 1:**

Sei  $\Delta_Q^1$  die Tetraederzerlegung eines einzelnen Würfels  $Q$ . Dann ist

$$\widetilde{\mathcal{M}}_Q = \bigcup_{i=1}^6 \widetilde{\mathcal{M}}_i$$

eine minimal bestimmende Menge des Splineraums  $\mathcal{S}_q^1(\Delta_Q^1)$  und es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta_Q^1)) = \#\widetilde{\mathcal{M}} = q^3 + 2q + 1.$$

**Beispiel:**

Abbildung 65 zeigt die verschiedenen Schichten von Bézier-Bernstein-Punkten für die Tetraederzerlegung  $\Delta_Q^1$  eines Würfels  $Q$  sowie die minimal bestimmende Menge  $\widetilde{\mathcal{M}}_Q$  in den Fällen  $q = 3$  und  $q = 4$ . Die Punkte der Mengen  $\widetilde{\mathcal{M}}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sind in dieser Reihenfolge

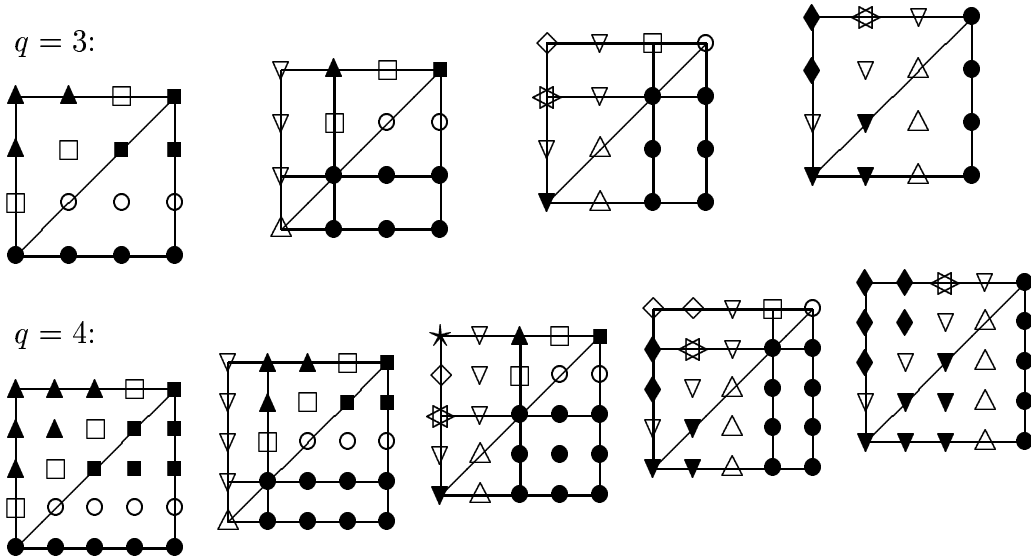


Abb. 65: Minimal bestimmende Menge  $\widetilde{\mathcal{M}}_Q$  für  $q = 3$  (oben) und  $q = 4$  (unten).

mit  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\blacktriangledown$ ,  $\blacklozenge$  und  $\star$  markiert. Die fehlenden Koeffizienten werden in der Reihenfolge  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\triangle$ ,  $\nabla$ ,  $\star$  und  $\diamond$  berechnet.

Als nächstes geben Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] eine alternative minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}_Q$  für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta_Q^1)$  an. Diese Menge  $\mathcal{M}_Q$ , die mehr Symmetrien als  $\widetilde{\mathcal{M}}_Q$  besitzt, wird zur Konstruktion einer minimal bestimmenden Menge für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$ ,  $q \geq 2$ , auf der gesamten Zerlegung verwendet. Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{P_{0,0,0}\} \cup \{P_{0,\alpha,\beta}, P_{\alpha,0,\beta}, P_{\alpha,\beta,0} : \alpha, \beta = 0, \dots, q, \alpha \neq \beta\}, \\ \mathcal{M}_2 &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma}, P_{\beta,\gamma,\alpha}, P_{\gamma,\alpha,\beta} : \alpha = 1, \dots, q-1, \beta, \gamma = \alpha+1, \dots, q-1, \beta \neq \gamma\}, \\ \mathcal{M}_3 &= \{P_{q,\alpha,\beta}, P_{\alpha,q,\beta}, P_{\alpha,\beta,q} : \alpha, \beta = 1, \dots, q-1, \alpha \neq \beta\}, \end{aligned}$$

**Lemma 2:**

Sei  $\Delta_Q^1$  die Tetraederzerlegung eines einzelnen Würfels  $Q$ . Dann ist

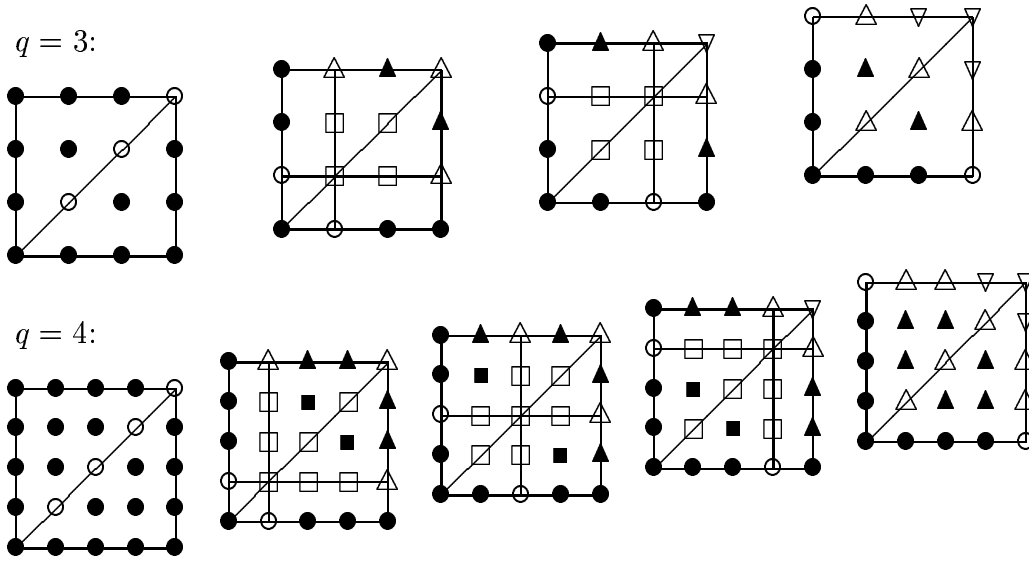
$$\mathcal{M}_Q = \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{M}_i$$

eine minimal bestimmende Menge des Splineraums  $\mathcal{S}_q^1(\Delta_Q^1)$ .

**Beispiel:**

Abbildung 66 zeigt die verschiedenen Schichten von Bézier-Bernstein-Punkten für die Tetraederzerlegung  $\Delta_Q^1$  eines Würfels  $Q$  sowie die minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}_Q$  in den Fällen  $q = 3$  und  $q = 4$ . Die Punkte der Mengen  $\mathcal{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , sind in dieser Reihenfolge mit  $\bullet$ ,  $\blacksquare$  und  $\blacktriangle$  markiert. Die fehlenden Bézier-Bernstein-Koeffizienten werden in der Reihenfolge  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\triangle$  und  $\nabla$  bestimmt.



Abb. 66: Minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}_Q$  für  $q = 3$  (oben) und  $q = 4$  (unten).

## Die Dimension von $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$

Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] konstruieren für beliebiges  $q \in \mathbb{N}$  eine minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}$  des Splineraums  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$  auf der Zerlegung  $\Delta^1$  von  $\Omega$  wie folgt:

Für  $i, j, k = 1, \dots, n$  sei

$$\mathcal{M}_{(i,j,k)} = \{P_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{M}(\Delta_{Q(i,j,k)}) : P_{\alpha,\beta,\gamma} - (i-1, j-1, k-1) \in \mathcal{M}_Q\},$$

wobei  $\mathcal{M}_Q$  wie in Lemma 2 definiert ist. Also ist  $\mathcal{M}_{(1,1,1)} = \mathcal{M}_Q$  und  $\mathcal{M}_{(i,j,k)}$ ,  $(i, j, k) \neq (1, 1, 1)$ , die Menge der Punkte in  $\mathcal{M}_Q$ , die um den Vektor  $(i-1, j-1, k-1)$  verschoben sind. Dann seien für  $i, j, k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(i,j,k)} &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{M}_{(i,j,k)} : \alpha \geq 2\}, \\ \mathcal{B}_{(i,j,k)} &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{M}_{(i,j,k)} : \beta \geq 2\}, \\ \mathcal{C}_{(i,j,k)} &= \{P_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{M}_{(i,j,k)} : \gamma \geq 2\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt zur Vereinfachung  $P_{\alpha,\beta,\gamma} = P_{\alpha,\beta,\gamma}^{Q(i,j,k)}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, q$ , falls  $P_{\alpha,\beta,\gamma}^{Q(i,j,k)} \in \mathcal{M}(\Delta_{Q(i,j,k)})$ . Schließlich sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_{(1,1,1)} \\ &\cup \bigcup_{i=2}^n \left[ \mathcal{A}_{(i,1,1)} \cup \mathcal{B}_{(1,i,1)} \cup \mathcal{C}_{(1,1,i)} \right] \\ &\cup \bigcup_{i,j=2}^n \left[ (\mathcal{A}_{(i,j,1)} \cap \mathcal{B}_{(i,j,1)}) \cup (\mathcal{A}_{(i,1,j)} \cap \mathcal{C}_{(i,1,j)}) \cup (\mathcal{B}_{(1,i,j)} \cap \mathcal{C}_{(1,i,j)}) \right] \\ &\cup \bigcup_{i,j,k=2}^n \left[ \mathcal{A}_{(i,j,k)} \cap \mathcal{B}_{(i,j,k)} \cap \mathcal{C}_{(i,j,k)} \right]. \end{aligned}$$

**Theorem:**

$\mathcal{M}$  ist eine minimal bestimmende Menge für  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$  und es gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)) = (q-3)(q-2)(q-1)n^3 + 6(q-2)(q-1)n^2 + 9(q-1)n + 4.$$

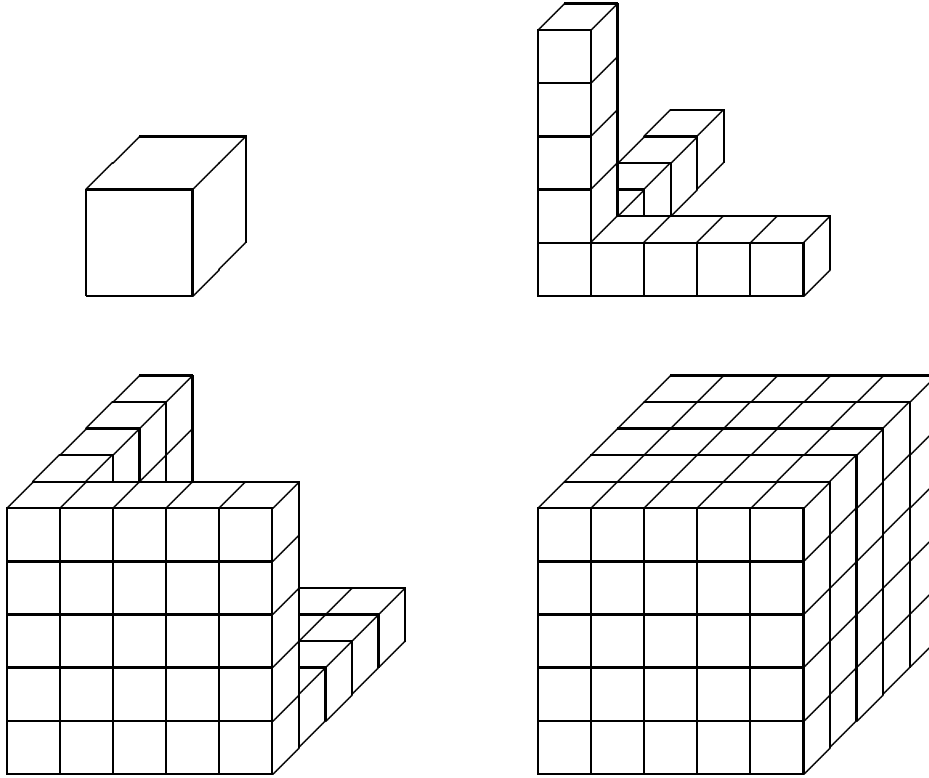


Abb. 67: Reihenfolge der Bestimmung der Freiheitsgrade.

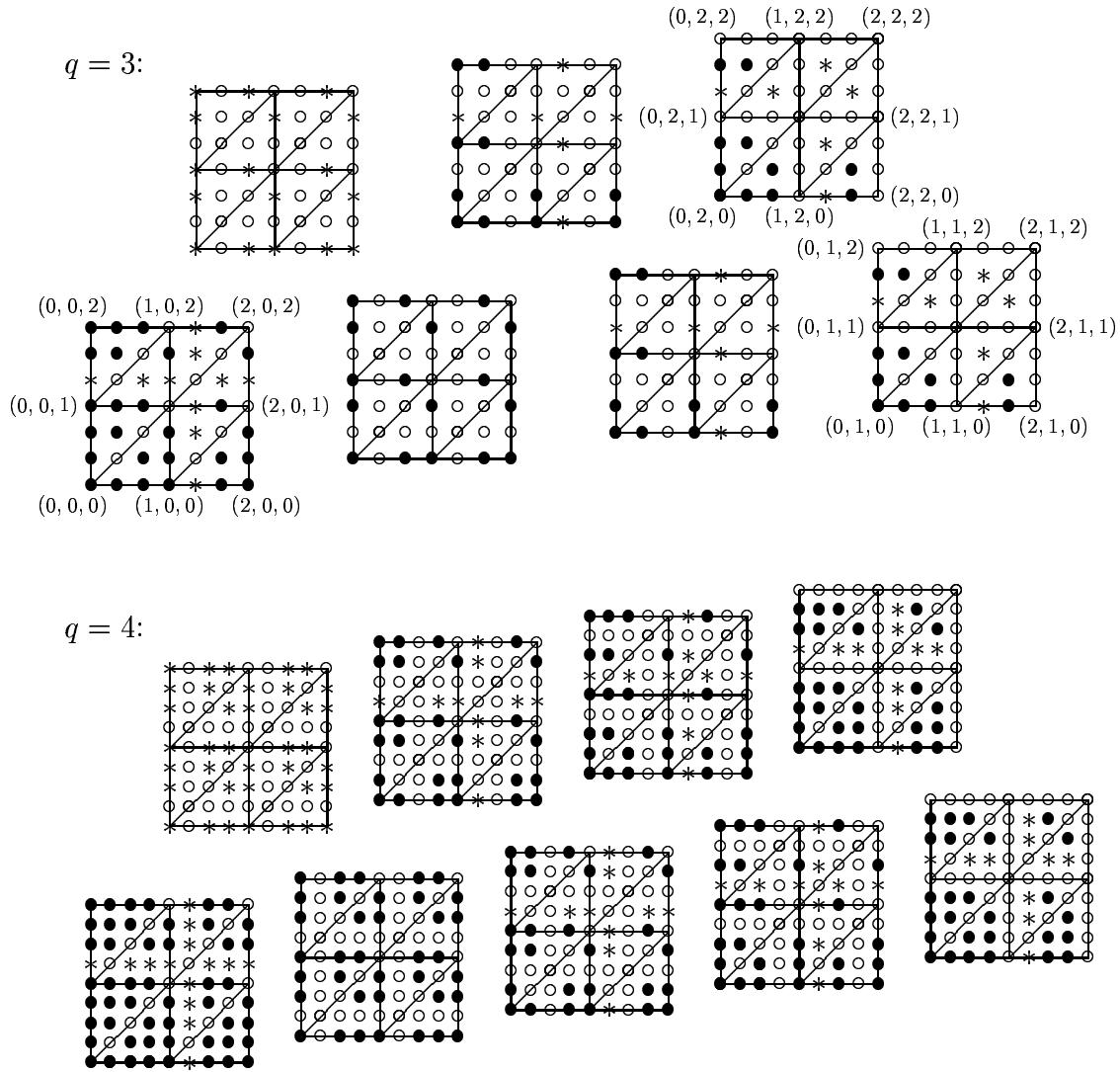
**Bemerkung:**

In Abbildung 67 ist die Reihenfolge der Bestimmung der Freiheitsgrade des Splineraums  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$ ,  $q \geq 2$ , dargestellt. Zunächst wird der Würfel  $Q_{(1,1,1)}$  betrachtet (links oben), danach induktiv Würfel mit einem behandelten Nachbarn (rechts oben), zwei behandelten Nachbarn (links unten) und zuletzt drei behandelten Nachbarn (rechts unten).

**Beispiel:**

Abbildung 68 zeigt die minimal bestimmende Menge  $\mathcal{M}$  für  $n = 2$  in den Fällen  $q = 3$  und  $q = 4$ . Die Punkte von  $\mathcal{M}$  sind mit  $\bullet$  gekennzeichnet. Die nicht gewählten Punkte der Menge  $\mathcal{M}_Q$  auf den Würfeln  $Q = Q_{(i,j,k)}$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , sind mit  $*$  markiert. Die fehlenden Bézier-Bernstein-Koeffizienten  $\circ$  werden zuerst auf  $Q_{(1,1,1)}$ , dann auf  $Q_{(2,1,1)}$ ,  $Q_{(1,2,1)}$  und  $Q_{(1,2,1)}$ , anschließend auf  $Q_{(2,2,1)}$ ,  $Q_{(2,1,2)}$  und  $Q_{(1,2,2)}$  und zuletzt auf  $Q_{(2,2,2)}$  berechnet. Für  $n = 2$  gilt  $\dim(\mathcal{S}_3^1(\Delta^1)) = 88$  und  $\dim(\mathcal{S}_4^1(\Delta^1)) = 250$ .

Zum Abschluß geben Hecklin, Nürnberger und Zeilfelder [76] einige Gleichungen für die Dimension von  $\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)$  an.

Abb. 68: Die Menge  $\mathcal{M}$  für  $n = 2$  und  $q = 3$  (oben) bzw.  $q = 4$  (unten).**Korollar:***Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta^1)) &= \frac{1}{6} \left[ 24 \#V(\Delta^1) + 6(3q - 7) \#E(\Delta^1) + 3(2q^2 - 15q + 21) \#F(\Delta^1) \right. \\
&\quad \left. + (q^3 - 18q^2 + 80q - 87) \#N(\Delta^1) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[ 18(q - 1) \#V_I(\Delta^1) + 3(2q^2 - 3q + 1) \#V_B(\Delta^1) \right. \\
&\quad \left. + (q^3 - 6q^2 + 8q - 3) \#N(\Delta^1) - 12(q^2 - 3q) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[ (q^3 + 6q^2 + 8q - 15) \#V_I(\Delta^1) - (q^3 + 6q^2 - 10q + 3) \#E_I(\Delta^1) \right. \\
&\quad \left. + (q^3 - q) \#F_I(\Delta^1) + (q^3 + 6q^2 + 8q + 9) \right].
\end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Adam: Bivariate Spline-Interpolation auf Crosscut-Partitionen, Doktorarbeit, Universität Mannheim 1995.
- [2] P. Alfeld: A trivariate  $C^1$  Clough-Tocher interpolation scheme, Computer Aided Geometric Design **1** (1984) 169-181.
- [3] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: An explicit basis for  $C^1$  quartic bivariate splines, SIAM Journal of Numerical Analysis **24** (1987) 891-911.
- [4] P. Alfeld, L. L. Schumaker: The Dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 4r + 1$ , Constructive Approximation **3** (1987) 189-197.
- [5] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 4r + 1$ , Computer Aided Geometric Design **4** (1987) 105-123.
- [6] P. Alfeld, L. L. Schumaker: On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d = 3r + 1$ , Numerical Mathematics **57** (1990) 651-661.
- [7] P. Alfeld, L. L. Schumaker, M. Sirvent: The dimension and existence of local bases for multivariate spline spaces, Journal of Approximation Theory **70** (1992) 243-264.
- [8] P. Alfeld, L. L. Schumaker, W. Whiteley: The generic dimension of the space of  $C^1$  splines of degree  $d \geq 8$  on tetrahedral decompositions, SIAM Journal of Numerical Analysis **30** (1993) 889-920.
- [9] P. Alfeld: Upper and lower bounds on the dimension of multivariate spline spaces, SIAM Journal of Numerical Analysis **33,2** (1996) 571-588.
- [10] P. Alfeld: Bivariate spline spaces and minimal determining sets, Journal of Computational and Applied Mathematics **119** (2000) 13-27
- [11] P. Alfeld, L. L. Schumaker: Non-existence of star-supported spline bases, SIAM Journal of Mathematical Analysis **31** (2000) 1482-1501.
- [12] P. Alfeld, L. L. Schumaker: Smooth Macro-elements based on Clough-Tocher triangle splits, Numerical Mathematics, preprint 2002.
- [13] P. Alfeld, L. L. Schumaker: Smooth Macro-elements based on Powell-Sabin triangle splits, Advances in Computational Mathematics, preprint 2002.
- [14] R. E. Barnhill: Representation and approximation of surfaces, in: J. R. Rice (Ed.): Mathematical Software III, Academic Press, New York 1977, 68-119.

- [15] R. E. Barnhill, G. Farin:  $C^1$  quintic interpolation over triangles: two explicit representations, *International Journal of Numerical Engineering* **17** (1981) 1763-1778.
- [16] R. E. Barnhill: Computer aided surface representation and design, in: R. E. Barnhill, W. Boehm (Eds.): *Surfaces in Computer Aided Design*, North Holland, Amsterdam 1983, 1-24.
- [17] R. E. Barnhill: Surfaces in Computer-aided geometric design: A survey with new results, *Computer Aided Geometric Design* **2** (1985) 1-17.
- [18] P. Bézier: *Essay de Définition Numérique des Courbes et de Surfaces Expérimentales*, Doktorarbeit, Universität Paris 1977.
- [19] W. Boehm, G. Farin, J. Kahmann: A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design* **1** (1984) 1-60.
- [20] C. de Boor: *A practical guide to splines*, Springer Verlag, New York 1978.
- [21] C. de Boor, K. Höllig: Approximation order from bivariate  $C^1$  cubics: a counterexample, *Proceedings of the American Mathematical Society* **87** (1983) 649-655.
- [22] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin, (Ed.): *Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.
- [23] C. de Boor, K. Höllig: Approximation Power of Smooth Bivariate PP Functions, *Mathematische Zeitschrift* **197** (1988) 343-363.
- [24] C. de Boor, A. Ron: Computational aspects of polynomial interpolation in several variables, *Mathematics of Computation* **58** (1992) 705-727.
- [25] C. de Boor, Q. Jia: A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions, *Journal of Approximation Theory* **72** (1993) 24-33.
- [26] L. Bos: On certain configurations of points in  $\mathbb{R}^n$  which are unisolvent for polynomial interpolation, *Journal of Approximation Theory* **64,3** (1991) 271-280.
- [27] C. K. Chui, R. H. Wang: On smooth multivariate spline functions, *Mathematics of Computation* **41** (1983) 131-142.
- [28] C. K. Chui, R. H. Wang: Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type-1 triangulations, *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* **101** (1984) 540-554.
- [29] C. K. Chui, T. X. He: On location of sample points in  $C^1$  quadratic bivariate spline interpolation, in: L. Collatz, G. Meinardus and G. Nürnberger (Eds.): *Numerical Methods of Approximation Theory*, ISNM 81, Birkhäuser, Basel 1987, 30-43.
- [30] C. K. Chui, M.-J. Lai: On multivariate vertex splines and applications, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, F. Utreras, (Eds.), *Topics in multivariate Approximation*, Academic Press, New York 1987, 19-36.

- [31] C. K. Chui: Multivariate splines, CBMS 54, SIAM, Philadelphia 1988.
- [32] C. K. Chui, M.-J. Lai: On bivariate super vertex splines, *Constructive Approximation* **6** (1990) 399-419.
- [33] C. K. Chui, M.-J. Lai: Multivariate vertex splines and finite elements, *Journal of Approximation Theory* **60** (1990) 245-343.
- [34] C. K. Chui, D. Hong, Q. Jia: Stability of optimal-order approximation by bivariate splines over arbitrary triangulations, *Transactions of the American Mathematical Society* **347** (1995) 3301-3318.
- [35] C. K. Chui, D. Hong: Construction of local  $C^1$  quartic spline elements for optimal-order approximation, *Mathematics of Computation* **65** (1996) 85-98.
- [36] C. K. Chui, D. Hong: Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **34** (1997) 1472-1482.
- [37] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart: General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods, *Arch. Rational Mech. Anal.* **46** (1972) 177-199.
- [38] R. W. Clough, J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in: *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio 1965.
- [39] C. Coatmélec: Approximation et interpolation des fonctions différentiable de plusieurs variables, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **83,3** (1966) 271-341.
- [40] L. J. Cowen, W. Goddard, C. E. Jesurum: Coloring with defect, *Proceedings of the 8th Annual ACM Symposium on discrete algorithms*, SIAM 1997, 548-557.
- [41] M. Dæhlen, T. Lyche: Boxsplines and applications, in: G. Farin et. al. (Eds.): *Geometric Modelling*, Springer 1991, 35-93.
- [42] M. Dæhlen, T. Lyche, K. Morken, R. Schneider, H.-P. Seidel: Multiresolution analysis over triangles based on quadratic Hermite interpolation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **119** (2000) 97-114.
- [43] W. Dahmen: On multivariate B-splines, *SIAM J. Numer. Anal.* **17** (1980) 179-191.
- [44] W. Dahmen, C. A. Micchelli: Recent progress in multivariate splines, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward (Eds.): *Approximation Theory IV*, Academic Press, New York 1983, 27-121.
- [45] W. Dahmen: Bernstein-Bézier representation of polynomial surfaces, in: *Proc. ACM SIGGRAPH*, Dallas 1986.

- [46] W. Dahmen, R. H. J. Gmeling Meyling, J. H. M. Ursem: Scattered data interpolation by bivariate  $C^1$ -piecewise quadratic functions, *Approximation Theory and its Applications* **6** (1990) 6-29.
- [47] O. Davydov: On almost interpolation, *Journal of Approximation Theory* **91** (1997) 398-418.
- [48] O. Davydov, G. Nürnberger, G. Walz, F. Zeilfelder: Interpolation by bivariate splines on crosscut partitions, in: G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz (Eds.): *Multivariate Approximation and Splines*, ISNM 125, Birkhäuser, Basel 1997, 189-204.
- [49] O. Davydov, M. Sommer, H. Strauss: Locally linearly independent systems and almost interpolation, in: G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz (Eds.): *Multivariate Approximation and Splines*, ISNM 125, Birkhäuser, Basel 1997, 59-72.
- [50] O. Davydov: Locally linearly independent basis for  $C^1$  bivariate Splines of degree  $q \geq 5$ , in: M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker (Eds.): *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, Vanderbilt University Press, Nashville 1998, 71-77.
- [51] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Approximation order of bivariate spline interpolation for arbitrary smoothness, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **90** (1998) 117-134.
- [52] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on triangulations, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker (Eds.): *Approximation Theory IX*, Vanderbilt University Press, Nashville 1998, 17-24.
- [53] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by splines on triangulations, in: M. W. Müller, M. D. Buhmann, D. H. Mache, M. Felten (Eds.): *New Developments in Approximation Theory*, ISNM 132, Birkhäuser, Basel 1999, 49-70.
- [54] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by  $C^1$  splines of degree  $q \geq 4$  on triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **126** (2001) 159-183.
- [55] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut, L. L. Schumaker, (Eds.): *Curve and Surface Fitting: St. Malo 1999*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2000, 161-170.
- [56] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constructive Approximation* **17** (2000) 181-208.
- [57] O. Davydov, L. L. Schumaker: Locally linearly independent bases for bivariate polynomial spline spaces, *Advances in Computational Mathematics* **13** (2000) 355-373.
- [58] O. Davydov: Stable local bases for multivariate spline spaces, *Journal of Approximation Theory* **111** (2001) 267-297.
- [59] O. Davydov, L. L. Schumaker: On stable local bases for bivariate polynomial splines, *Constructive Approximation* **18** (2002) 87-116.



- [60] O. Davydov, L. L. Schumaker: Stable approximation and interpolation with  $C^1$  quartic splines, SIAM Journal of Numerical Analysis, preprint 2002.
- [61] O. Davydov, F. Zeilfelder: Scattered data fitting by direct extension of local polynomials to bivariate splines, in Erscheinung
- [62] P. Diereck, S. van Leemput, T. Vermeire: Algorithms for surface fitting using Powell-Sabin splines, IMA Journal of Numerical Analysis **12,2** (1992) 171-299.
- [63] D. Diener: Instability in the dimension of spaces of bivariate piecewise polynomials of degree  $2r$  and smoothness order  $r$ , SIAM Journal of Numerical Analysis **27,2** (1990) 543-551.
- [64] A. Engelmann: Bernstein-Bézier-Methoden und Interpolation mit bivariaten Splinerräumen, Doktorarbeit, Universität Mannheim 2003.
- [65] G. Farin: Subsplines über Dreiecken, Doktorarbeit, Universität Braunschweig 1979.
- [66] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, CAGD **2** (1985) 19-27.
- [67] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier Patches, CAGD **3** (1986) 83-127.
- [68] G. Farin: Geometric Modeling, SIAM, Philadelphia 1987.
- [69] G. Farin: Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design - eine praktische Einführung, Vieweg, Braunschweig 1994.
- [70] J. Gao: Interpolation by  $C^1$  quartic bivariate splines, Journal of Mathematical Research Expo. **11** (1991) 433-442.
- [71] M. Gasca: Multivariate polynomial interpolation, in: W. Dahmen et al. (Eds.): Computation of Curves and Surfaces, Kluwer Academic Publishers 1990, 215-236.
- [72] M. Gasca, T. Sauer: Polynomial interpolation in several variables, Advances in Computational Mathematics, preprint 2002.
- [73] R. H. J. Gmelig Meyling, P. R. Pfluger: On the dimension of the spline space  $S_2^1(\Delta)$  in special cases, in: W. Schempp, K. Zeller (Eds.): Multivariate Approximation Theory III, Birkhäuser, Basel 1985, 180-190.
- [74] R. H. J. Gmelig Meyling: Approximation by piecewise cubic  $C^1$ -splines on arbitrary triangulations, Numerische Mathematik **51** (1987) 65-85.
- [75] T. Hangelbroeck, G. Nürnberger, C. Rössl, H.-P. Seidel, F. Zeilfelder: Dimension of  $C^1$ -splines on Type-6 Tetrahedral partitions, in Erscheinung.
- [76] G. Hecklin, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: The Structure of  $C^1$  Splines on Freudenthal Partitions, eingereicht.
- [77] D. Hong: Spaces of bivariate spline functions over triangulations, Approximation Theory and its Applications **7** (1991) 56-75.

- [78] A. Ibrahim, L. L. Schumaker: Super spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 3r + 2$ , *Constructive Approximation* **7** (1991) 401-423.
- [79] F. Jeeawock-Zedek, P. Sablonnière: Hermite and Lagrange interpolation by quadratic splines on non-uniform criss-cross triangulations, in: P. J. Laurent, et al. (Eds.): *Wavelets, images and surface fitting*, Wesley, MA 1994, 445-452.
- [80] T. R. Jensen, B. Toft: *Graph Coloring Problems*, Wiley, New York 1995.
- [81] R. Q. Jia: Approximation by smooth bivariate splines on a three-direction mesh, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. Ward (Eds.): *Approximation Theory IV*, Academic Press, New York 1983, 539-545.
- [82] R. Q. Jia: Approximation order from certain spaces of smooth bivariate splines on a three directional mesh, *Transactions of the American Mathematical Society* **295** (1986) 199-212.
- [83] R. Q. Jia: Lower bounds on the dimension of spaces of bivariate splines, *ISNM 94*, Birkhäuser 1990, 155-165.
- [84] N. Kohlmüller: *Lagrange und Hermite Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen*, Doktorarbeit, Universität Mannheim 2001.
- [85] N. Kohlmüller, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation of surfaces in 3D space by bivariate splines, in *Erscheinung*
- [86] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Composite quadrilateral finite elements of class  $C^r$ , in: T. Lyche, L. L. Schumaker (Eds.): *Mathematical Methods in CAGD* Academic Press, New York 1989, 413-418.
- [87] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière:  $C^r$  finite elements of HCT, PS and FVS types, in: J. Periaux and R. P. Shaw (Eds.): *Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, Springer, Berlin 1989, 163-168.
- [88] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Triangular finite elements of HCT type and class  $C^p$ , *Advances in Computational Mathematics* **2** (1994) 101-122.
- [89] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière:  $C^r$ -finite elements of Powell-Sabin type on the three directional mesh, *Advances in Computational Mathematics* **6** (1996) 191-206.
- [90] M.-J. Lai: Approximation order from bivariate  $C^1$ -cubics on a four-directional mesh is full, *Computer Aided Geometric Design* **11** (1994) 215-223.
- [91] M.-J. Lai: Scattered data interpolation and approximation using bivariate  $C^1$  piecewise cubic polynomials, *Computer Aided Geometric Design* **13** (1996) 81-88.
- [92] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Scattered data interpolation using  $C^2$  supersplines of degree six, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **34** (1997) 905-921.

- [93] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: On the approximation power of bivariate splines, *Advances in Computational Mathematics* **9** (1998) 251-279.
- [94] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: On the approximation power of splines on triangulated quadrangulations, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **36** (1999) 143-159.
- [95] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Macro elements and stable bases for splines on Clough-Tocher triangulations, *Numerical Mathematics* **88** (2001) 105-119.
- [96] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Macro elements and stable bases for splines on Powell-Sabin triangulations, *Mathematics of Computation*, preprint 2002.
- [97] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Quadrilateral macro elements, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, preprint 2002.
- [98] M.-J. Lai, A. LeMéhauté: A new kind of trivariate  $C^1$  spline, preprint 2003.
- [99] S. L. Lee, G. M. Phillips: Interpolation on a triangle, *Comm. Appl. Numer. Methods* **3** (1987) 271-276.
- [100] G. G. Lorentz, R. A. Lorentz: Solvability problems of bivariate interpolation I, *Constructive Approximation* **2** (1986) 153-169.
- [101] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for  $C^1$  piecewise polynomials of degree  $n \geq 5$ , *Mathematics of Computation* **29** (1975) 736-740.
- [102] C. Manni: On the dimension of bivariate spline spaces over rectilinear partitions, *Approximation Theory and its Applications* **7,1** (1991) 23-34.
- [103] C. Manni: On the dimension of bivariate spline spaces over generalized quasi-cross-cut partitions, *Journal of Approximation Theory* **69** (1992) 141-155.
- [104] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.
- [105] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **13** (1992) 75-96.
- [106] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Bivariate spline interpolation at grid points, *Numerical Mathematics* **71** (1995) 91-119.
- [107] G. Nürnberger: Approximation order of bivariate spline interpolation: *Journal of Approximation Theory* **87** (1996) 117-136.
- [108] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Spline interpolation on convex quadrangulations, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker (Eds.): *Approximation Theory IX*, Vanderbilt University Press, Nashville 1998, 259-266.
- [109] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in: R. H. Wang (Ed.): *Proceedings of the Morningside Institute*, Peking 1998.

- [110] G. Nürnberger, G. Walz: Error analysis in interpolation by bivariate  $C^1$ -splines, IMA Journal of Numerical Analysis **18** (1998) 485-508.
- [111] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: On bivariate spline spaces, in: W. Haußmann, K. Jetter, M. Reimer (Eds.): Advances in Multivariate Approximation, Wiley 1998, 227-231.
- [112] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, Journal of Computational and Applied Mathematics **119** (1999) 347-376.
- [113] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, Journal of Computational and Applied Mathematics **121** (2000), 125-152.
- [114] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate  $C^1$  cubic splines, in: T. Lyche and L. L. Schumaker (Eds.), Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2001, 393-404.
- [115] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by cubic splines on a class of triangulations, in: K. Kopotun, T. Lyche, M. Neamtu (Eds.): Proc. Conf. Trends in Approximation Theory, Vanderbilt University Press, Nashville 2001, 341-350.
- [116] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, F. Zeilfelder: Lagrange Interpolation by  $C^1$  cubic splines on Triangulations of Separable Quadrangulations, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. Stöckler (Eds.): Approximation Theory X: Splines, Wavelets, and Applications, Vanderbilt University Press, Nashville 2002, 405-424.
- [117] G. Nürnberger, L. L. Schumaker, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by  $C^1$  cubic splines on triangulated quadrangulations, preprint 2003.
- [118] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange-Interpolation by Bivariate  $C^1$ -Splines with Optimal Approximation Order, Advances in Computational Mathematics, preprint 2003.
- [119] G. Nürnberger, C. Rössl, H.-P. Seidel, F. Zeilfelder: Quasi-Interpolation by quadratic piecewise polynomials in three variables, preprint 2003.
- [120] M. J. D. Powell, M. A. Sabin: Piecewise quadratic approximation on triangles, ACM Transactions on Mathematical Software **3** (1977) 316-325.
- [121] P. Percell: On cubic and quartic Clough-Tocher finite elements, SIAM Journal of Numerical Analysis **13** (1976) 100-103.
- [122] Th. Riessinger: Interpolation by bivariate quadratic splines on a four-directional mesh, Computing **49** (1992) 129-137.
- [123] P. Sablonnière: Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximants, Computer Aided Geometric Design **2** (1985), 29-36.
- [124] P. Sablonnière: Composite finite elements of class  $C^2$  in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, F. I. Utreras (Eds.): Topics in Multivariate Approximation, Academic Press, New York 1987, 207-217.

- [125] T. Sauer, Y. Xu: On multivariate Lagrange interpolation, *Mathematics of Computation* **64** (1995) 1147-1170.
- [126] T. Sauer, Y. Xu: On multivariate Hermite interpolation, *Advances in Computational Mathematics* **4** (1995) 207-259.
- [127] L. L. Schumaker: Fitting surfaces to scattered data, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, G. G. Lorentz (Eds.): *Approximation Theory II*, Wiley, New York 1976, 203-286.
- [128] L. L. Schumaker: On the dimension of piecewise polynomials in two variables, in: W. Schempp, K. Zeller (Eds.): *Multivariate Approximation Theory*, Birkhäuser, Basel 1979, 396-412.
- [129] L. L. Schumaker: *Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York 1980, 553ff.
- [130] L. L. Schumaker: On spaces of piecewise polynomials in two variables, in: S. P. Singh (Ed.): *Approximation Theory and Spline Functions* 1984, 151-197.
- [131] L. L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **14** (1984) 251-264.
- [132] L. L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, *Computer Aided Geometric Design* **5** (1987) 277-284.
- [133] L. L. Schumaker: Triangulation methods, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, F. I. Utreras (Eds.): *Topics in Mult. Approximation*, Academic Press, New York 1987, 219-232.
- [134] L. L. Schumaker: On super splines and finite elements, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **4** (1989) 997-1005.
- [135] L. L. Schumaker, T. Sorokina: Quintic spline interpolation on Type-4 tetrahedral partitions, preprint 2003.
- [136] H.-P. Seidel, F. Zeilfelder: Splines over triangulations, in: G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim (Eds.): *Handbook on Computer Aided Design*, preprint 2003.
- [137] Z. Sha: On interpolation by  $S_3^1(\Delta_{m,n}^1)$ , *Approximation Theory and its Applications* **1** (1985) 1-18.
- [138] Z. Sha: On interpolation by  $S_2^1(\Delta_{m,n}^2)$ , *Approximation Theory and its Applications* **1** (1985) 71-82.
- [139] M. Sommer, H. Strauss: Interpolation by uni- and multivariate generalized splines, *Journal of Approximation Theory* **83** (1995) 423-447.
- [140] M. Sommer, H. Strauss: A condition of Schoenberg-Whitney type for multivariate spline interpolation, *Advances in Computational Mathematics* **5** (1996) 381-397.

- [141] G. Strang: Piecewise polynomials and the finite element method, Bulletin of the American Mathematical Society **79** (1973) 1128-1137.
- [142] T. Wang: A  $C^2$ -quintic spline interpolation scheme on triangulation, Computer Aided Geometric Design **9** (1992) 379-386.
- [143] T. Whelan: A representation of a  $C^2$  interpolant over triangles, Computer Aided Geometric Design **3** (1986) 53-66.
- [144] A. Worsey, G. Farin: An n-dimensional Clough-Tocher interpolant, Constructive Approximation **3,2** (1987), 99-110.
- [145] A. Ženišek: Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method, Journal of Approximation Theory **7** (1973) 334-351.
- [146] A. Ženišek: A general theorem on triangular finite  $C^m$ -elements, RAIRO Anal. Num. **2** (1974) 119-127.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Mannheim, im Oktober 2004